C5, valeurs propres, vecteurs propres

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Objectif de ce 5eme cours : Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de A

Motivation : La connaissance des valeurs propres d'une matrice est, par exemple, très importante pour évaluer le risque de rupture d'une structure soumise à une sollicitation périodique
exemples : ponts, avions, Ariane 4

Calculer les racines du polynôme caractéristique est peu efficace (instabilité du calcul)

Méthode de la puissance

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$,
$\lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| > |\lambda_i|$, $i \neq n$ $(|\lambda_n| = \rho(A))$
Calcul de λ_n, plus "grande" valeur propre

Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
Itération : $k \geq 0$, $x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|}$

Sauf dans un cas particulier,

1. $\lim_{k\to+\infty} x^{(2k)} = x$, $\|x\| = 1$, $Ax = \lambda_n x$
2. Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\lim_{k\to+\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)} = \lambda_n$

Méthode de la puissance. Démonstration, cas simple

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$,
$\lambda_n \in \mathbb{R}$, $|\lambda_n| > |\lambda_i|$, $i \neq n$

On suppose A diagonalisable dans $\mathbb{R}$
$\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$, t.q. $Au_i = \lambda_i u_i$ pour tout i
$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$, On suppose $\alpha_n \neq 0$

$$x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k u_i}{\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k u_i\|} = \frac{\lambda_n^k}{|\lambda_n|^k} \frac{\alpha_n u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_n})^k u_i}{\|\alpha_n u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\frac{\lambda_i}{\lambda_n})^k u_i\|}$$

1. $\lim_{k\to+\infty} x^{(2k)} = \frac{\alpha_n u_n}{\|\alpha_n u_n\|} = x$, $\|x\| = 1$, $Ax = \lambda_n x$
2. Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\lim_{k\to+\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)} = Ax \cdot x = \lambda_n x \cdot x = \lambda_n$

La convergence est d'autant plus rapide que $\max_{i\neq n} \frac{|\lambda_i|}{|\lambda_n|}$ est petit

Méthode de la puissance. cas général

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$,
$\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n > |\lambda_i|$, $i \neq n$

Triangularisation de A
$\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de $\mathbb{C}^n$, t.q. $Au_i = \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^{i-1} t_{j,i} u_j$ pour tout i
$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, On suppose $\alpha_n \neq 0$

$$x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A^k u_i}{\|A^k x^{(0)}\|}$$

On montre aussi (mais c'est plus difficile)

1. $\lim_{k\to+\infty} x^{(2k)} = x$, $\|x\| = 1$, $Ax = \lambda_n x$
2. Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\lim_{k\to+\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)} = \lambda_n$

En général $Au_n \neq \lambda_n u_n$, donc $x \notin \mathbb{R}u_n$

Principe de la démonstration sur un exemple

$$A = \begin{bmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (matrice stochastique particulière)

$0 \le a, b, \alpha, \beta, \gamma \le 1, \quad a + \alpha + \beta = 1, \quad b + \gamma = 1$

$Sp(A) = \{a, b, 1\}$, $\ker(A - I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$0 < a, b < 1$

$m = \max\{a, b, \alpha, \beta, \gamma\} < 1$

1. Par récurrence, $A^k = \begin{bmatrix} a^k & \alpha_k & \beta_k \\ 0 & b^k & \gamma_k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $0 < \alpha_k \le km^k$.
2. $a^k + \alpha_k + \beta_k = 1$ et $b^k + \gamma_k = 1$
   (le produit de matrices stochastiques est stochastique)

On en déduit que $\lim_{k \to +\infty} A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Principe de la démonstration sur un exemple, fin

$$A = \begin{bmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ (matrice stochastique particulière)

$0 \leq a, b, \alpha, \beta, \gamma \leq 1, \quad a + \alpha + \beta = 1, \quad b + \gamma = 1$

$0 < a, b < 1$, $\ker(A - I) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lim_{k \to +\infty} A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_3 \neq 0$

$\lim_{k \to +\infty} A^k x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x^{(k)} = \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|}$

$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x$, $x \in \ker(A - I)$, $x \neq 0$

Produit de matrices stochastiques

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastiques
$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} = 1$ (pour tout i)

$C = AB$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$

$\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}) = 1$

$a_{i,j} \geq 0, \; b_{i,j} \geq 0$ (pour tout i, j)

$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$ (pour tout i, j)

Méthode de la puissance inverse

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversible, $Sp(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$,
$\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| < |\lambda_i|$, $i \neq n$ $\left(\frac{1}{|\lambda_1|} = \rho(A^{-1})\right)$
Calcul de λ_1, plus "petite" valeur propre de A

Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
Itération : $k \geq 0$, $Ay^{k+1} = x^{(k)}$, $x^{(k+1)} = \frac{y^{k+1}}{\|y^{k+1}\|}$
$\left(x^{(k+1)} = \frac{A^{-1}x^{(k)}}{\|A^{-1}x^{(k)}\|}\right)$

Sauf dans un cas particulier,

1. $\lim_{k\to+\infty} x^{(2k)} = x$, $\|x\| = 1$, $Ax = \lambda_1 x$ $\left(A^{-1}x = \frac{x}{\lambda_1}\right)$
2. Si $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, $\lim_{k\to+\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)} = \lambda_1$

Méthode de la puissance, compléments

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

1. Pour le cas où il existe $i \neq n$ t.q. $\lambda_i = \lambda_n$ ou λ_i très proche de λ_n (la méthode de la puissance risque de converger très lentement), on peut raisonner par "blocs"
2. Pour calculer des valeurs propres (et des vecteurs propres) autre que λ_1 et λ_n, on peut travailler avec $A - \alpha I$ au lieu de A

Question : peut-on calculer simultanément toutes les valeurs propres de A (et éventuellement des vecteurs propres associés) ?

Décomposition QR de A

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversible

Il existe Q, matrice orthogonale (c'est-à-dire $Q^t = Q^{-1}$) et R matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs t.q. $A = QR$. Les matrices Q et R sont uniques

Si A n'est pas inversible, les matrices Q et R existent toujours sauf que les coefficients diagonaux de R sont seulement positifs et Q, R ne sont pas uniques

Q orthogonale, interprétation par colonnes

$Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Q orthogonale, $q_i = C_i(Q)$

$$Q^{-1} = Q^t \Leftrightarrow Q^t Q = I \Leftrightarrow L_i(Q^t) \cdot C_j(Q) = \delta_{i,j} \text{ pour tout } i, j$$
$$\Leftrightarrow C_i(Q) \cdot C_j(Q) = \delta_{i,j} \text{ pour tout } i, j$$
$$\Leftrightarrow q_i \cdot q_j = \delta_{i,j} \text{ pour tout } i, j$$

$\delta_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, $\delta_{i,i} = 1$

$A = QR$, interprétation par colonnes

R est triangulaire supérieure, $r_{i,j} = 0$ si $j < i$, $r_{i,i} > 0$

$q_i = C_i(Q)$, $a_i = C_i(A)$, $Re_i = r_i = \begin{bmatrix} r_{1,i} \\ \vdots \\ r_{n,i} \end{bmatrix}$

$$A = QR \Leftrightarrow a_i = C_i(A) = Ae_i = QRe_i = \sum_{j=1}^{i} r_{j,i} q_j \text{ pour tout } i$$

$$\Leftrightarrow q_i = \frac{1}{r_{i,i}} a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{r_{j,i}}{r_{i,i}} q_j \text{ pour tout } i$$

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Existence de Q, R par "Gram-Schmidt"

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversible, $a_i = C_i(A)$, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$
On cherche Q et R t.q. $q_i \cdot q_j = \delta_{i,j}$, $q_i = \frac{1}{r_{i,i}} a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{r_{j,i}}{r_{i,i}} q_j$
$q_i = C_i(Q)$ $r_i = C_i(R)$

1. Construction de q_1 et r_1
   $v_1 = a_1$, $r_{1,1} = \sqrt{v_1 \cdot v_1}$, $q_1 = \frac{v_1}{r_{1,1}}$ $(q_1 \cdot q_1 = 1)$
2. Construction de q_i et r_i, $i > 1$
   $ev\{q_1, \ldots, q_{i-1}\} = ev\{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$
   $v_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_i \cdot q_j) q_j$. $(v_i \cdot q_j = 0,\ j < i)$ Noter que $v_i \neq 0$
   $r_{j,i} = a_i \cdot q_j$, $j < i$, $r_{i,i} = \sqrt{v_i \cdot v_i}$, $q_i = \frac{v_i}{r_{i,i}}$
   $(q_i \cdot q_j = \delta_{i,j},\ j \leq i)$
   $q_i = \frac{1}{r_{i,i}} a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{r_{j,i}}{r_{i,i}} q_j$

D'autres constructions de R et Q sont possibles (Householder, Givens ...), parfois plus efficaces

Méthode QR

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversible
Décomposition QR de A : $A = QR$, $A_1 = RQ$,
$A_1 = RQ = Q^{-1}AQ$ et donc $sp(A_1) = sp(A)$

Méthode QR :
Initialisation $A_0 = A$
Itération Pour $k \geq 0$,
Décomposition QR de A_k : $A_k = Q_k R_k$, $A_{k+1} = R_k Q_k$

Pour la plupart des matrices dont les valeurs propres sont réelles la partie diagonale de A_k converge, quand $k \to +\infty$, vers les valeurs propres de A

On peut aussi souvent trouver les vecteurs propres correspondants avec les matrices Q_k, (ce sont les colonnes de la matrice $Q_0 Q_1 \ldots Q_k$ quand $k \to +\infty$)

Méthode QR, remarques

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversible

1. La démonstration de la convergence de la méthode QR n'est connue que sous des hypothèses très restrictives
2. Si A n'est pas inversible, on peut appliquer l'algorithme sur $A - \alpha I$, α bien choisi (même dans le cas A inversible, un bon choix de α, qui peut aussi dépendre de k, permet d'accelerer la convergence)