Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
Exercices de révision, systèmes linéaires

Exercice 1 (Dcéompositions LU et de Choleski, barème 6 points)**.**
Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 10 \\ 1 & 10 & 18 \end{bmatrix}$.

1. Calculer les mineurs principaux de M. En déduire que M admet des décompositions LU et de Choleski.
2. Donner la décomposition LU de M.
3. Donner la décomposition de Choleski de M.

Exercice 2 (Conservation du profil)**.** On considère la matrice A de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ de la forme suivante, où x en position (i,j) de la matrice signifie que le coefficient $a_{i,j}$ est non nul et 0 en position (i,j) de la matrice signifie que $a_{i,j} = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} \\ 0 & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} & \mathrm{x} \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & 0 & \mathrm{x} & \mathrm{x} \end{bmatrix}.$$

Pour cette matrice, quels sont les coefficients nuls (notés 0 dans la matrice) qui resteront nécessairement nuls dans les matrices L et U de la factorisation LU sans permutation (si elle existe) ?

Exercice 3 (Rayon spectral et norme)**.**
Soit $n > 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^\star$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ tels que

$|\lambda| = \rho(A)$,

$x \neq 0$, $Ax = \lambda x$ et $Ay = \lambda y + \mu x$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\rho(A) < \|A\|$ pour toute norme induite sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose donc $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme induite aussi notée $\|\cdot\|$.

1. Montrer que $y \neq 0$ et $x + ay \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. [Utiliser le fait que $\mu \neq 0$.]
2. On suppose dans cette question que $\lambda = 1$ (et donc $\rho(A) = 1$).
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, avec $\varepsilon\mu > 0$, on a
   $$\|(1+\varepsilon\mu)x + \varepsilon y\| \geq \|(1+\varepsilon\mu)(x+\varepsilon y)\| - \|\varepsilon^2 \mu y\| = \|x+\varepsilon y\| + \varepsilon\mu(\|x+\varepsilon y\| - \|\varepsilon y\|). \quad (1)$$
   (b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\|A(x+\varepsilon y)\| > \|x+\varepsilon y\|$. [Calculer $A(x+\varepsilon y)$ et utiliser (1).]
   En déduire que $\rho(A) < \|A\|$.
3. On suppose dans cette question que $\lambda \neq 0$. Montrer que $\rho(A) < \|A\|$.
   [Appliquer la question 2 à une matrice B bien choisie.]
4. On suppose dans cette question que $\lambda = 0$. Montrer que $\rho(A) < \|A\|$.
5. Donner un exemple d'une matrice A vérifiant les hypothèses de l'exercice avec $\lambda = 3$ et $\mu = 1$ (on pourra se limiter à $n = 2$).

Exercice 4 (Non convergence d'une méthode itérative)**.**
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B telle que $|\lambda| = \rho(B) \geq 1$. On suppose que $\lambda \notin \mathbb{R}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$ tel que $Bz = \lambda z$. On note r la partie réelle de z et s la partie imaginaire (donc $z = r + is$). Pour $k \geq 0$, on pose $r^{(k)} = B^k r$ et $s^{(k)} = B^k s$. Montrer que l'une (au moins) des suites $(r^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(s^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand $k \to +\infty$.

2. Soit $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $x = Bx + c$. On considère la méthode itérative $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ pour $k \geq 0$. Montrer qu'il existe $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ pour lequel $x^{(k)} \not\to x$ quand $k \to +\infty$.

Exercice 5 (Vitesse de convergence pour la méthode de Jacobi)**.**
Soient A une matrice carrée d'ordre n, inversible, et $b \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$. On pose $\bar{x} = A^{-1}b$. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A. On suppose que D est inversible et on note B_J la matrice des itérations de la méthode de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E+F)$. On rappelle que la méthode de Jacobi s'écrit
Initialisation : $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,
Itérations : pour tout $k \geq 0$, $Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b$.
On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $\|\cdot\|$. On note ρ le rayon spectral de B_J.

1. On suppose que B_J est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de B_J). Montrer qu'il existe $C > 0$, dépendant de A, b, $x^{(0)}$ et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, mais indépendant de k, telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| \leq C\rho^k \text{ pour tout } k \geq 0.$$
2. On ne suppose plus que B_J est diagonalisable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$, dépendant de A, b, $x^{(0)}$, ε et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$, mais indépendant de k, telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| \leq C_\varepsilon(\rho + \varepsilon)^k \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Dans la suite de cet exercice on prend $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Dans cette question, on choisit, pour norme dans $\mathbb{R}^2$, la norme euclidienne, c'est-à-dire $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Montrer qu'il existe C (dépendant de b et $x^{(0)}$, mais non de k) telle que
$$\|x^{(k)} - \overline{x}\| = C\rho^k \text{ pour tout } k \geq 0. \quad (2)$$
4. Montrer qu'il existe des normes dans $\mathbb{R}^2$ pour lesquelles la conclusion de la question 3 est fausse (c'est-à-dire pour lesquelles la suite $(\|x^{(k)} - \overline{x}\|/\rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite constante sauf éventuellement pour des valeurs particulières de $x^{(0)}$).

Exercice 6 (Sur la méthode de Jacobi)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p.. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
D &= (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}, \; d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j, \; d_{i,i} = a_{i,i}, \\
E &= (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}, \; e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j, \; e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j, \\
F &= (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}, \; f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j, \; f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j.
\end{aligned}$$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, comptées avec leur multiplicité et rangées par ordre croissant, c'est-à-dire $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.
On note $f_1, \ldots, f_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, $Af_i = \lambda_i f_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = \lambda_n$. Montrer que $A = \lambda_1 I_n$ (où I_n est la matrice "identité").

Dans la suite, on suppose $\lambda_1 < \lambda_n$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = \alpha I_n$.

2. Montrer que $\lambda_1 < \alpha < \lambda_n$. [On pourra utiliser la trace de A.]

On note B_J la matrice de Jacobi, c'est-à-dire $B_J = D^{-1}(E+F)$.

3. Montrer que B_J est symétrique et calculer les valeurs propres de B_J en fonction de celles de A et de α. [Calculer $B_J f_i$.]
4. Calculer $\rho(B_J)$ en fonction et λ_1, λ_n et α. Montrer que $\rho(B_J) < 1$ si et seulement si $\lambda_n < 2\alpha$.

On suppose maintenant que $\rho(B_J) < 1$ et on s'intéresse à la méthode itérative de Jacobi, c'est-à-dire

(a) Initialisation : On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Itérations : Pour $k \in \mathbb{N}$, $Dx^{(k+1)} = (E+F)x^{(k)} + b$,

5. Soit $i \in \{2, \ldots, n-1\}$. On suppose dans cette question que $b = \alpha f_i$ et que $\lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n$.
   (a) On suppose que $x^{(0)} = 0$. Montrer que $x^{(k)} = \gamma_k f_i$, avec $\gamma_k \in \mathbb{R}$. On pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. Montrer que
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = \frac{|\lambda_i - \alpha|}{\alpha} < \rho(B_J).$$
   (b) On suppose que $x^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$, avec $\alpha_n \neq 0$, et que $\alpha - \lambda_1 < \alpha\rho(B_J) = \lambda_n - \alpha$.
   On pose $x = \lim_{k\to+\infty} x^{(k)}$. Montrer que
   $$\lim_{k\to+\infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x\|}{\|x^{(k)} - x\|} = \rho(B_J).$$
6. On suppose dans cette question que $A \neq D$ (et donc $F \neq 0$). Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que si f_i est un vecteur propre de B_{GS}, on a alors $\lambda_i = \alpha$. (on rappelle que $B_{GS} = (D-E)^{-1}F$).
7. On ne suppose plus qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = \alpha I_n$
   (a) Montrer que $\lambda_1 \leq a_{i,i} \leq \lambda_n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
   (b) Donner un exemple pour lequel la matrice B_J n'est pas symétrique.
   (c) (Question facultative) Donner un exemple pour lequel les vecteurs propres de A ne sont pas vecteurs propres de B_J.

Exercice 7 (Systèmes linéaires, "Mauvaise relaxation")**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice s.d.p.. On note D la partie diagonale de A, $-E$ la partie triangulaire inférieure stricte de A et $-F$ la partie triangulaire supérieure stricte de A, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{l} D = (d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ d_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j,\ d_{i,i} = a_{i,i}, \\ E = (e_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ e_{i,j} = 0 \text{ si } i \leq j,\ e_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i > j, \\ F = (f_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n},\ f_{i,j} = 0 \text{ si } i \geq j,\ f_{i,j} = -a_{i,j} \text{ si } i < j. \end{array}$$

Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à calculer $x \in \mathbb{R}^n$ t.q. $Ax = b$. Pour $0 < \omega < 2$, on considère la méthode itérative suivante :

(a) Initialisation : On choisit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Itérations : Pour $k \in \mathbb{N}$,
On calcule $\tilde{x}^{(k+1)}$ dans $\mathbb{R}^n$ solution de $(D-E)\tilde{x}^{(k+1)} = Fx^{(k)} + b$,
On pose $x^{(k+1)} = \omega\tilde{x}^{(k+1)} + (1-\omega)x^{(k)}$.

Enfin, on pose $M = \frac{D-E}{\omega}$ et $N = M - A$.

1. Montrer que la méthode s'écrit aussi $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$ et que la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie (c'est-à-dire que M est inversible).
2. On suppose dans cette question que $0 < \omega \leq 1$. Montrer que $M^t + N$ est s.d.p..
   N.B. : Un lemme du polycopié (lemme 1.53) donne alors que la méthode est convergente.
3. On suppose, dans cette question, que $n = 2$. On pose $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}$.

(a) Montrer que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma^2 < \alpha\beta$.

(b) Montrer que la méthode est convergente pour $0 < \omega < 2$. [Indication : Soit μ une valeur propre de $M^{-1}N$, montrer que $\mu \in]-1, 1[$.]

(c) Montrer, en donnant un exemple, que $M^t + N$ n'est pas toujours s.d.p.. [Prendre $\gamma \neq 0$.]

4. On suppose, dans cette question, que $n = 3$ et on prend $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, avec $-\frac{1}{2} < a < 1$.

   (a) Vérifier que A est bien s.d.p..

   (b) Montrer que si $a = -1/2$ et $\omega = 2$, la matrice M est toujours inversible (mais A n'est plus s.d.p.) et que $\rho(M^{-1}N) > 1$. En déduire qu'il existe $a \in]-1/2, 1[$ et $\omega \in]0, 2[$ tels que $\rho(M^{-1}N) > 1$.

5. On suppose $n \geq 3$. Donner un exemple de matrice A ($A \in M_n(\mathbb{R})$, A s.d.p) pour laquelle la méthode est non convergente pour certains $\omega \in]0, 2[$. [Utiliser la question précédente.]

Exercice 8 (Méthode de la puissance)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On rappelle que la méthode de la puissance consiste à construire une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :
Initialisation $x^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{|y^{(0)}|} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,
Itérations pour $k \geq 0$, si $Ax^{(k)} \neq 0$, $x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{|Ax^{(k)}|}$
où $|x|$ désigne la norme euclidienne du vecteur x.
En définissant la suite $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ par $y^{(k)} = A^k y^{(0)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on remarque que, si $y^{(k)} \neq 0$ pour tout k,

$$x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{|y^{(k)}|}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On note $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $\mu \neq 0$.

   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   On utilise la méthode de la puissance avec $y^{(0)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, $\alpha_2 \neq 0$.

   (b) Montrer que la méthode de la puissance définit bien une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et que $x^{(k)}$ est, pour tout $k \in \mathbb{N}$, colinéaire au vecteur $(\alpha_1 + k\alpha_2\mu/\lambda)e_1 + \alpha_2 e_2$.

   (c) Calculer $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$ et $\lim_{k \to +\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$.

   (d) Peut-on appliquer le théorème vu en cours sur la méthode de la puissance à cette matrice ?

2. Dans cette question, on pose $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \gamma \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$ avec $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda > |\mu|$, $\gamma \neq 0$.

   (a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   On utilise la méthode de la puissance avec $y^{(0)} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, $\alpha_1 \neq 0$.

   (b) Montrer que la méthode de la puissance définit bien une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

   (c) Calculer $\lim_{k \to +\infty} x^{(k)}$ et $\lim_{k \to +\infty} Ax^{(k)} \cdot x^{(k)}$.

   (d) Peut-on appliquer le théorème vu en cours sur la méthode de la puissance à cette matrice ?