Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, analyse numérique et optimisation
DM de mai 2020, exercice 2

Notations : pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), $u \cdot v$ désigne le produit scalaire usuel de u avec v et $|u|$ la norme de u associée à ce produit scalaire.
L'inégalité $u \geq v$ signifie $u_i \geq v_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ où les u_i (resp. v_i) sont les composantes de u (resp. v).

Exercice 1 (Convergence monotone de la méthode étudiée dans le projet)**.** On considère dans cet exercice la méthode donnée dans le projet pour trouver une solution de l'équation (3) du projet (voir les définitions de A, R, b ci dessous).
La méthode (itérative), n est fixé, $\beta \geq 0$ est :
Initialisation $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $u_i^{(0)} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Itérations Pour $k \geq 0$, $Au^{(k+1)} + \beta u^{(k+1)} = -R(u^{(k)}) + \beta u^{(k)} + b$.
On note m l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 (c'est-à-dire $m = u^{(0)}$) et M l'élément de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 2.

1. (Propriété de A) Soient $\beta \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $Au + \beta u \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$.
   [Considérer $i_0 = \min\{i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $u_i \leq u_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}\}$ et montrer $u_{i_0} \geq 0$.]
2. (Propriété de R) L'application R est une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.
   (a) Soient $u \in \mathbb{R}^n$, $m \leq u \leq M$, et $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
   Montrer que $\partial_j R_i(u) \leq 0$ pour $i \neq j$ et $\partial_i R_i(u) \leq 128$.
   (b) Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$, $m \leq u \leq v \leq M$, et $\beta \geq 128$. Montrer que $\beta u - R(u) \leq \beta v - R(v)$.
3. (Sous et sur solutions) Montrer que $Am + R(m) \leq b$ et $AM + R(M) \geq b$.
4. On choisit $\beta \geq 128$. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout $k \geq 0$,
$$m \leq u^{(k)} \leq u^{(k+1)} \leq M.$$
   En déduire qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^{(k)} \to u$ quand $k \to +\infty$ et que $Au + R(u) = b$, $m \leq u \leq M$.

Le modèle consiste à chercher la fonction u de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution du problème suivant :
$$-\frac{1}{10}u''(x) + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}(u^4(x) - u^4(y))dy = 0 \text{ pour } x \in]0, 1[, \tag{1}$$
$$u(0) = 1,\ u(1) = 2. \tag{2}$$

On admet que cette solution existe (en particulier, on admet qu'elle est bien continue sur $[0, 1]$ et deux fois dérivable sur $]0, 1[$. On va calculer (de manière approchée) cette solution en utilisant une discrétisation par différences finies.
Pour $n \geq 1$, on pose $h = 1/(n + 1)$. La discrétisation par différences finies de (1)-(2) consiste à chercher le vecteur u de $\mathbb{R}^n$ solution de
$$Au + R(u) = b, \tag{3}$$
avec A, $R(u)$ donnés par :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A[i, i] = 2/(10h^2)$, $A[i, j] = -1/(10h^2)$ si $|i - j| = 1$ et $A[i, j] = 0$ si $|i - j| > 1$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
- $R(u) \in \mathbb{R}^n$ et pour $i \in \{1, \ldots, n\}$,
$$R(u)_i = \sum_{j \in \{1, \ldots, n\},\, j \neq i} \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{|i-j|}}(u_i^4 - u_j^4) + \frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{i}}(u_i^4 - 1) + \frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{n+1-i}}(u_i^4 - 16),$$
- $b \in \mathbb{R}^n$, $b_1 = 1/(10h^2)$, $b_n = 2/(10h^2)$, $b_i = 0$ pour $1 < i < n$.