Une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est continue et même localement lipschitzienne. On le montre ici pour $n = 1$. Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Continuité de f

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour $y \in]x, x+1[$, on écrit y comme une combinaison convexe de x et $x+1$, c'est-à-dire

$$y = tx + (1-t)(x+1), \text{ avec } t = x + 1 - y \in]0,1[.$$

Par convexité de f, on obtient

$$f(y) \leq tf(x) + (1-t)f(x+1) = (x-y)(f(x) - f(x+1)) + f(x) \tag{1}$$

On écrit maintenant x comme une combinaison convexe de $x-1$ et y, c'est-à-dire

$$x = sy + (1-s)(x-1), \text{ avec } s = \frac{1}{y-x+1} \in]0,1[.$$

Par convexité de f, on obtient

$$f(x) \leq sf(y) + (1-s)f(x-1) \text{ et donc } f(y) \geq \frac{1-s}{s}f(x) - \frac{1-s}{s}f(x-1) + f(x)$$

Comme $\frac{1-s}{s} = y - x$, ceci donne

$$f(y) \geq f(x) + (1-t)f(x+1) = (y-x)(f(x) - f(x-1)) + f(x). \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) donnent pour tout $y \in [x, x+1[$,

$$(y-x)(f(x) - f(x-1)) + f(x) \leq f(y) \leq (x-y)(f(x) - f(x+1)) + f(x)$$

On en déduit que $\lim_{y \to x, y > x} f(y) = f(x)$, c'est-à-dire la continuité à droite de f.

De manière analogue on peut montrer que $\lim_{y \to x, y < x} f(y) = f(x)$. (on peut d'ailleurs se ramener au cas précédent en posant $g(x) = f(-x)$. La fonction g est aussi une fonction convexe. La continuité à droite de g donne la continuité à gauche de f.)

La fonction est localement lipschitzienne

Il suffit de revenir aux inégalités (1) et (2). Elles donnent pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]x-1, x+1[$

$$|f(y) - f(x)| \leq |x-y|(|f(x)| + |f(x+1)| + |f(x-1)|).$$

Soit $R > 0$. Comme f est continue, f est bornée sur $[-R-1, R+1]$. On note L_R la borne de $|f|$ sur $[-R-1, R+1]$. On a alors, pour tout $x \in [-R, R]$ et tout $y \in]x-1, x+1[$

$$|f(y) - f(x)| \leq 3L_R|x-y|.$$

Ceci montre bien le caratère localement lipschitzien de f.