C8, Exponentielle d'une matrice

Système autonome homogène :

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On rappelle que l'ensemble E_n des solutions de (1) est un espace vectoriel de dimension n.

On cherche une base de E_n c'est-à-dire une famille de n fonctions (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$) qu'on note $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$, linéairement indépendantes et solutions de (1)

La famille $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ est alors une base de E_n et les solutions de (1) sont les combinaisons linéaires des fonctions $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$; elles sont donc de la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X^{(i)}(t),\ t \in \mathbb{R}, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Ecriture matricielle de la solution générale

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$\{X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\}$ base de E_n. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & \dots & X^{(n)}(t) \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire que le vecteur $X^{(i)}(t)$ forme la i-ième colonne de la matrice $M(t)$ (qui est donc une matrice de n lignes et n colonnes). Pour $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, on pose

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \text{ de sorte que } M(t)C = \sum_{i=1}^{n} c_i X^{(i)}(t)$$

Cette égalité résulte de la définition du produit matrice-vecteur : le vecteur $M(t)C$ est une combinaison linéaire des colonnes de $M(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. La solution générale du système est donc $t \mapsto M(t)C$, avec C arbitraire dans $\mathbb{R}^n$

Objectif : trouver une matrice $M(t)$

Cas “facile” : La matrice A est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), vu Cours 6.

Cas “difficile” : La matrice A est non diagonalisable.

Deux méthodes :

Calculer une matrice $M(t)$ par la méthode initiée dans le cours 6

Calculer une matrice $M(t)$ avec la fonction exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Multiplicité géométrique et algébrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in Sp(A)$, on note $m_g(\lambda)$ la multiplicité géométrique de λ et $m_a(\lambda)$ la multiplicité algébrique de λ

$$m_g(\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I)) \geqslant 1$$
$$P_A(y) = (y - \lambda)^{m_a(\lambda)} Q(y)$$

où P_A le polynôme caractéristique de A et Q est un polynôme de degré $n - m_a(\lambda)$ tel que $Q(\lambda) \neq 0$.

On a toujours $1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$ et $\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_a(\lambda) = n$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ pour tout λ

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$Sp(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A
Pour $\lambda \in Sp(A)$ on choisit $\varphi \in \mathbb{R}^n$ vecteur propre associé à λ, c'est-à-dire $\varphi \neq 0$ et $A\varphi = \lambda\varphi$.
La fonction $t \mapsto e^{\lambda t}\varphi$ est alors solution du système
Comme A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on obtient ainsi n solutions linéairement indépendantes, notées $X^{(i)}$, $i = 1, \ldots, n$. Plus précisément $X^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t}\varphi_i$, avec $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\varphi_i \neq 0$.
On définit alors la matrice $M(t)$ comme la matrice dont la i-ème colonne est le vecteur $X^{(i)}(t)$:

$$M(t) = \left[X^{(1)}(t) \quad \ldots \quad X^{(n)}(t)\right].$$

On rappelle que la solution de générale du système est alors la fonction $t \mapsto M(t)C$, avec $C \in \mathbb{R}^n$

Cas d'une valeur propre complexe

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$\lambda \in Sp(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$
$\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^n$ et $A\varphi = \lambda\varphi$
On rappelle (Cours 6) que l'on obtient deux solutions linéairement indépendantes du système en posant

$$\begin{cases} X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2) \\ X^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2) \end{cases}$$

et que $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont linéairement indépendantes car φ_1 et φ_2 sont linéairement indépendantes (cours 6)
$\varphi_2 = 0$ donne $A\varphi_1 = (\alpha + i\beta)\varphi_1$, impossible
$\varphi_1 = 0$ donne $Ai\varphi_2 = (\alpha + i\beta)(i\varphi_2)$, impossible
$\varphi_2 = c\varphi_1$ donne $A((1 + ic)\varphi_1) = (\alpha + i\beta)((1 + ic)\varphi_1)$
En multipliant cette égalité par $(1 - ic)$ on obtient
$A(1 + c^2)\varphi_1 = (\alpha + i\beta)(1 + c^2)\varphi_1$, impossible

Cas d'une valeur propre complexe, suite

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chaque valeur propre complexe non réelle, de A, on obtient donc deux solutions linéairement indépendantes du système (elles sont construites à partir d'un vecteur propre φ)

Si λ est de multiplicité géométrique m_g , on construit ainsi $2m_g$ solutions linéairement indépendantes du système

Remarque : la valeur propre $\bar{\lambda}$ donne le même ensemble de solutions.

Rappel : $m_g(\lambda) = m_g(\bar{\lambda})$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$\lambda \in Sp(A)$

Premier cas : $\lambda \in \mathbb{R}$

On obtient $m_g(\lambda)$ solutions linéairement indépendantes du système

Second cas : $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

On obtient $2m_g(\lambda)$ solutions linéairement indépendantes du système

Comme $\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_g(\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp(A)} m_a(\lambda) = n$, on obtient n solutions linéairement indépendantes du système

L'indépendance des solutions vient de l'indépendances des vecteurs propres (car l'hypothèse faite ici est que l'on a une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Une matrice non diagonalisable, $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Sp(A) = \{0\}$, $m_a(0) = 2$, $m_g(0) = 1$

(car $m_g(0) = 2$ implique $A = 0$)

Multiplicité algébrique et dimension du sous-espace propre

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in Sp(A)$. Alors, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant d \leqslant m_a(\lambda)$ et $\dim(\ker(A - \lambda I)^d) = m_a(\lambda)$.

Exemple : $m_g(\lambda) = 1$ et $m_a(\lambda) = 2$, alors on a $\dim(\ker(A - \lambda I)) = 1$ et $\dim(\ker(A - \lambda I)^2) = 2$ (ici $d = 2$)

Première solution de $X'(t) = AX(t)$:

$$X^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\varphi,$$

avec $\varphi \in \ker(A - \lambda I)$

Seconde solution de $X'(t) = AX(t)$:

$$X^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(\psi + t\underbrace{(A - \lambda I)\psi}_{\neq 0}),$$

avec $\psi \in \ker(A - \lambda I)^2$, indépendant de φ

$X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont indépendants car $X^{(1)}(0)$ et $X^{(2)}(0)$ sont des vecteurs indépendants.

$(X^{(2)})'(t) = AX^{(2)}(t)$

$$X^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(\psi + t(A - \lambda I)\psi)$$

$$\begin{aligned}(X^{(2)}(t))' &= e^{\lambda t}(\lambda\psi + \lambda t(A - \lambda I)\psi + (A - \lambda I)\psi) \\ &= e^{\lambda t}(A\psi + \lambda t(A - \lambda I)\psi)\end{aligned}$$

Or $\psi \in \ker(A - \lambda I)^2$ et donc $\lambda(A - \lambda I)\psi = A(A - \lambda I)\psi$. On a donc

$$\begin{aligned}(X^{(2)}(t))' &= e^{\lambda t}(A\psi + tA(A - \lambda I)\psi) \\ &= Ae^{\lambda t}(\psi + t(A - \lambda I)\psi) \\ &= AX^{(2)}(t).\end{aligned}$$

Question : peut-on généraliser cet exemple ? oui !

Généralisation

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in Sp(A)$ avec (pour simplifier) $\lambda \in \mathbb{R}$
Soit $d \geq 1$ tel que $\dim(\ker(A - \lambda I)^d) = m_a(\lambda)$
Soit $\psi \in \ker(A - \lambda I)^d$. On obtient une solution du système en prenant la fonction X définie par

$$X(t) = e^{\lambda t}\left[\psi + t(A_{-}\lambda I)\psi + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}(A - \lambda I)^{d-1}\psi\right].$$

Comme la dimension de $\ker(A - \lambda I)^d$ est $m_a(\lambda)$, on construit ainsi $m_a(\lambda)$ solutions linéairement indépendantes.
Enfin, comme $\sum_{\lambda \in Sp(A)} m_a(\lambda) = n$, on construit ainsi n solutions linéairement indépendantes et donc une matrice $M(t)$

Nous allons retrouver maintenant ce résultat en construisant une autre matrice $M(t)$ possible à partir de la fonction exponentielle que nous allons définir de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Définition de e^A

Motivation : $n = 1$, $a \in \mathbb{R}$. La solution générale de $x'(t) = ax(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est l'application $t \mapsto x(t) = ce^{at}$, avec c arbitraire dans $\mathbb{R}$. L'idée est alors de définir une matrice e^{At} de manière à pouvoir écrire $X(t) = e^{At}C$, avec $C \in \mathbb{R}^n$ dans le cas $n > 1$

Dans ce cas, la matrice e^{At} est donc une matrice $M(t)$ possible. Mais, bien sûr, ce n'est pas la seule.)

Definition : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$

On montre que cette définition a un sens car cette série est convergente

Si $t \in \mathbb{R}$ on définit le produit tA (aussi noté At par abus de notation) en multipliant chaque coefficient de A par t

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ $e^{tA} = e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$

Questions

Q1. La série définissant e^A est elle convergence ?(c'est-à-dire que, pour chaque $i, j \in \{1, \dots, n\}$, la série (à valeurs réelles) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est convergente)

Q2. A-t-on $(e^{tA})' = Ae^{tA}$? Noter que la dérivée de la fonction à valeurs matricielles $t \mapsto e^{tA}$ est définie par les dérivées de chacune des composantes de e^{tA} (qui sont des fonctions à valeurs réelles)

Q3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a-t-on $e^{A+B} = e^A e^B$?

Convergence de la série

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$
$a = \max\{|a_{i,j}|,\ i, j \in\in \{1, \dots, n\}$

1. Pour tout $k \geq 0$ et pour tout $i, j \in\in \{1, \dots, n\}$,
   $|(A^k)_{i,j}| \leqslant n^{k-1}a^k$
   Récurrence sur k : ok pour $k = 1$ puis
   $|(A^{k+1})_{i,j}| \leqslant \sum_{l=0}^{n} |(A^k)_{i,l}A_{l,j}| \leqslant nn^{k-1}a^{k+1} \leqslant n^k a^{k+1}$
2. $\left|\frac{(A^k)_{i,j}}{k!}\right| \leq \frac{n^{k-1}a^k}{k!} = u_k$

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{n^k a^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{n^{k-1}a^k}\right| = \left|\frac{na}{k+1}\right| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est donc absolument convergente.
Plus précisément, on remarque que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ est, pour tout $T > 0$, uniformément convergente pour $t \in [-T, T]$

Dérivée de $t \mapsto e^{tA}$

Lemme sur la dérivée d'une limite :
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que

1. F_n converge simplement vers F (c'est-à-dire que pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(s) = F(s)$),
2. F_n' converge localement uniformément vers G, c'est-à-dire que pour tout $T > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \sup_{-T\leq s\leq T} |F_n'(s) - G(s)| = 0$

Alors $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F' = G$.

Preuve :

G est continue comme limite loc. unif. de fonctions continues

Puis, pour $a \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$, $F_n(s) - F_n(a) = \int_a^s F_n'(t)dt$

et donc, quand $n \to +\infty$, $F(s) - F(a) = \int_a^s G(t)dt$

car F_n' converge uniformément vers G sur $[a, s]$

F est de classe C^1 et $F' = G$

Dérivée de $t \mapsto e^{tA}$, suite

Lemme sur la dérivée d'une série : Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. On suppose que la série $\sum_{k\geqslant 0} f_k$ est convergente et que la série des dérivées $\sum_{k\geqslant 0} f'_k$ est localement uniformément convergente.

On pose $f = \sum_{k\geqslant 0} f_k$. Alors, f est de classe C^1 et $f' = \sum_{k\geqslant 0} f'_k$

Preuve : Appliquer le lemme précédent à $F_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

Conséquence : Dérivée de l'exponentielle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Preuve : On applique le lemme à $f : t \mapsto e^{tA}$ et aux fonctions $f_k : t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!}$ (plus présicément à chaque composante de ces applications à valeurs vectorielles)

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, (e^{At})' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) = Ae^{tA}$$

e^{At} est l'une des matrices $M(t)$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $X_0 \in \mathbb{R}^n$

$$X'(t) = AX(t)$$
$$X(0) = X_0$$

la solution est $X(t) = e^{tA}X_0$. En effet, $(e^{tA}X_0)' = A(e^{tA}X_0)$.

L'espace vectoriel E_n des solutions de $X'(t) = AX(t)$ est donc formé par les fonctions $t \mapsto e^{tA}C$, avec $C \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, en notant $X^{(i)}(t)$ la i-ieme colonne de e^{At} on a

$$e^{At}(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & \dots & X^{(n)}(t) \end{bmatrix}.$$

La matrice $e^{At}(t)$ est l'une des matrice $M(t)$ permettant d'écrire toutes les solutions sous la forme $M(t)C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Remarque : e^{At} est inversible car $e^{At}X_0$ implique $X_0 = 0$

$AB = BA$ implique $e^{A+B} = e^A e^B$

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ t.q. $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$

1. $A^k B = BA^k$ (par récurrence sur k),
2. $e^A B = Be^A$ (continuité du produit de matrices),
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} B = Be^{tA}$ (en changeant A en tA)
4. Soient $U,\ V \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors
   $(U(t)V(t))' = U(t)V'(t) + U'(t)V(t)$
   $(U(t)V(t))_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} U_{i,\ell}(t)V_{\ell,j}(t)$,
   $(U(t)V(t))'_{i,j} = (U'(t)V(t))_{i,j} + (U(t)V'(t))_{i,j}$
   $(e^{tA}e^{tB})' = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = Ae^{tA}e^{tB} + Be^{tA}e^{tB}$

$X(t) = e^{At}e^{Bt}$

$$X'(t) = (A + B)X(t),$$
$$X(0) = I$$

Or l'unique solution de ce problème est l'application $t \mapsto e^{t(A+B)}$
Donc $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$ pour tout t

Calcul d'une matrice $M(t)$

$$X'(t) = AX(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Première solution : $M(t) = e^{tA}$. Calcul rarement facile
Deuxième solution : Pour tout $\psi \in \mathbb{R}^m$, $t \mapsto e^{At}\psi$ est une solution du système (c'est la solution qui vaut ψ en 0)
Soit $\lambda \in Sp(A)$. On suppose (pour simplifier) que $\lambda \in \mathbb{R}$. On note d le plus petit entier tel que $\dim(\ker(A-\lambda I)^d) = m_a(\lambda)$ Soit $\psi \in \ker(A-\lambda I)^d$ alors

$$e^{At}\psi = e^{\lambda t}\left[\psi + t(A_-\lambda I)\psi + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}(A-\lambda I)^{d-1}\psi\right].$$

Preuve : Comme les matrices λI et $A - \lambda I$ commutent et comme la multiplication par la matrice $e^{\lambda I}$ est identique à la multiplication par le scalaire $e^{\lambda t}$
$e^{At}\psi = e^{At+\lambda It-\lambda It}\psi = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\psi =$
$e^{\lambda t}\left[\psi + t(A_-\lambda I)\psi + \cdots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!}(A-\lambda I)^{d-1}\psi\right]$

Calcul de e^A, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1ère méthode : Avec la série définissant e^A (rarement facile)
2ème méthode : On calcule une matrice $M(t)$ (associée au système $X'(t) = AX(t)$) avec n solutions linéairement indépendantes de ce système
L'espace vectoriel E_n des solutions du système est l'ensemble $\{t \mapsto M(t)C,\ C \in \mathbb{R}^n\}$
La solution de $X'(t) = AX(t)$ avec $X(0) = X_0$ est $X(t) = M(t)C$ avec $M(0)C = X_0$ (et donc $C = M(0)^{-1}X_0$) mais c'est aussi $X(t) = e^{At}X_0$
On a donc

$$e^{At} = M(t)M^{-1}(0) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

et $e^A = M(1)M^{-1}(0)$

Résolution des systèmes non homogènes

$$X'(t) = AX(t) + G(t)$$

où $G \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Etape 1 Résoudre l'équation homogène associée, c'est-à-dire lorsque $G = 0$. On trouve une matrice $M(t)$ permettant d'exprimer à l'instant t toutes les solutions du système homogène.

Etape 2 Dans cette deuxième étape, on recherche une solution particulière en devinant sa forme (méthode 1) ou en utilisant la méthode de la variation de la constante (méthode 2) consistant à poser $X(t) = M(t)C(t)$, $C(t) \in \mathbb{R}^n$. Comme d'habitude, cette deuxième méthode consiste à réduire l'ordre du système, c'est-à-dire ici à passer d'un système d'ordre 1 (sur l'inconnue X) à un système d'ordre 0 sur la nouvelle fonction inconnue C'. Plus précisément l'équation sur C' est $M(t)C'(t) = G(t)$, c'est-à-dire $C'(t) = M(t)^{-1}G(t)$

Exemple non homogène simple

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Les valeurs propres de la matrice en question sont $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$. La solution du système homogène est donc $X_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\phi_2$ où ϕ_1 (resp. ϕ_2) est un vecteur propre associé à λ_1 (resp. λ_2). On trouve alors une solution particulière $X_p(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t}$ où $a = -1$ et $b = -2$. La solution générale est donc

$$X(t) = X_h(t) + X_p(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\phi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\phi_2 + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Exemple non homogène plus difficile

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

$$A = C + D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $CD = DC$, $e^{tA} = e^{(C+D)t} = e^{tC}e^{tD}$

$$e^{tC} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k C^k}{k!} = I + tC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2t & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(t) = e^{tA} = e^{(C+D)t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 2te^t & e^t \end{bmatrix}$$

La solution générale du système homogème est donc $t \mapsto M(t)C$, avec C arbitraire dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple non homogène plus difficile, solution particulière

Deux difficultés : 1 est racine algébriquement double et géométriquement simple et le terme non homogène est e^t (ce qui cumule deux difficultés), on est amené à chercher une solution particulière sous la forme :

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} e^t + t \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} e^t + t^2 \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} e^t$$

En écrivant que X_p est solution du système, on trouve $c = 1$, $2a = d$, $e = 0$ et $f = c$. Une solution possible est donc $a = b = d = e = 0$, $c = f = 1$, c'est-à-dire

$$X_p(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} e^t$$

La solution générale du système non homogène est alors $t \mapsto X_p(t) + M(t)C$ avec C arbitraire dans $\mathbb{R}^2$.