C5, Equations différentielles linéaires du 2eme ordre

Une équation différentielle linéaire du second ordre s'écrit de la forme suivante:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \quad t \in I$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, (par exemple $I =]A, B[$), et les fonctions f, a et b, sont connues et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On cherche alors les fonctions y de classe C^2 qui vérifient cette équation.

Premier exemple : $I = \mathbb{R}$, a et b constantes, $f = 0$. Equation homogène à coefficients constants

Problème de Cauchy associé

Le problème de Cauchy associé fait intervenir une condition initiale qui porte sur le couple $(y(t_0), y'(t_0))$ en un point t_0 donné ; il s'écrit :

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \quad t \in]t_0, T[$$
$$y(t_0) = y_0$$
$$y'(t_0) = z_0$$

où t_0, T, f, a, b, y_0 et z_0 sont donnés, $t_0 < T \leqslant +\infty$, f, a, b sont continues de $[t_0, T[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution y de classe C^2 sur $]t_0, T[$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$), continue ainsi que sa dérivée sur $[t_0, T[$
Premier exemple : $t_0 = 0$, $T = +\infty$, a et b constantes, $f = 0$.

Existence et unicité pour le problème de Cauchy

$$
\begin{aligned}
&y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \quad t \in]t_0, T[\\
&y(t_0) = y_0 \\
&y'(t_0) = z_0
\end{aligned}
$$

f, a et b sont connues et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. y_0 et z_0 donnés dans $\mathbb{R}$.

On cherche une solution y de classe C^2 sur $]t_0, T[$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$), continue ainsi que sa dérivée sur $[t_0, T[$

Theorem

il existe une et une seule fonction y solution de ce problème de Cauchy

Démonstration : La semaine prochaine en voyant cette équation comme un système de 2 équations à 2 inconnues.

Equivalence entre une équation du 2eme ordre et un système du 1er ordre

$$
\begin{aligned}
& y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \quad t \in]t_0, T[\\
& y(t_0) = y_0 \\
& y'(t_0) = z_0
\end{aligned}
$$

y est solution de cette équation si et seulement si le couple (y, y') est solution du système de 2 équations à 2 inconnues

$$
\begin{aligned}
& y'(t) = z(t), \quad t \in]t_0, T[\\
& z'(t) = -a(t)z(t) - b(t)y(t) + f(t), \quad t \in]t_0, T[\\
& (y(t_0), z(t_0)) = (y_0, z_0)
\end{aligned}
$$

Ensemble des solutions de l'équation homogène

Equation homogène : $f = 0$
I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, a et b continues de I dans $\mathbb{R}$

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0, \quad t \in I$$

L'ensemble des solutions cette équation homogène est un espace vectoriel (réel) de dimension 2
Espace vectoriel ? Soit y_1, y_2 deux solutions. Alors $y_1 + y_2$ est encore solution. Si y est solution alors, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, αy est encore solution. L'ensemble des solutions cette équation homogène est bien un espace vectoriel
Dimension 2 ?

Ensemble des solutions de l'équation homogène, suite

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0, \quad t \in I \tag{1}$$

L'ensemble des solutions cette équation est un espace vectoriel
Dimension 2 ?
On choisit un point t_0 de I. Pour tout y_0 et z_0 dans $\mathbb{R}$, il existe une et une seule solution du problème de Cauchy consistant à chercher y solution de (1) avec $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$

- y_1 la solution correspondant à $y_0 = 0$, $z_0 = 1$,
- y_2 la solution correspondant à $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

La solution correspondant à $y_0 = \alpha$ et $z_0 = \beta$ est alors $\alpha y_2 + \beta y_1$.
La dimension de l'ensemble des solutions de (1) est donc égale à 2 et $\{y_1, y_2\}$ est une base de l'ensemble des solutions.

Trois Questions

1. Comment calculer l'ensemble des solutions de l'équation non homogène ?
   Idée : chercher deux solutions linéairement indépendantes simples, y_1 et y_2. Cela donne $y_h = \alpha y_1 + \beta y_2$, α, $\beta \in \mathbb{R}$.
2. Comment calculer l'ensemble des solutions de l'équation non homogène ?
   Idée : chercher une solution particulière y_p La solution générale de l'équation non homogène est $y = y_h + y_p$.
3. Comment calculer les solutions de problème de Cauchy ?
   Déterminer les coefficients α et β grâce aux conditions initiales ($y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$)

On répond dans un premier temps à ces questions dans le cas des solutions de l'équation homogène à coefficients constants.

Solutions de l'équation homogène à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

a, $b \in \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$ (ou I n'importe quel ouvert non vide de $\mathbb{R}$)
Idée : On cherche des solutions y sous la forme $y(t) = e^{rt}$

$$y(t) = e^{rt}, \quad y'(t) = re^{rt}, \quad y''(t) = r^2 e^{rt}$$

La fonction y est solution si et seulement si

$$r^2 e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0 \text{ pour tout } t \in I$$

et donc si et seulement si

$$r^2 + ar + b = 0$$

Cette équation s'appelle "équation caractéristique". On distingue 3 cas, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, deux racines complexes (conjuguées) ou une racine double

Equation à coefficients constants, deux racines réelles

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r^2 + ar + b = 0$$

$\Delta = a^2 - 4b > 0$, et les racines sont $r_1 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$
Deux solutions de l'équation homgène à coefficients constants :

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, \quad y_2(t) = e^{r_2 t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes
En effet, soient $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha y_1 + \beta y_2 = 0$. On a alors

$$\alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} = [\alpha e^{(r_1 - r_2)t} + \beta] e^{r_2 t} = 0.$$

Comme $r_1 - r_2 < 0$, $\lim_{t \to +\infty} \alpha e^{(r_1 - r_2)t} + \beta = \beta = 0$. On a donc aussi $\alpha = 0$.
Solution générale de l'équation homgène à coefficients constants :

$$t \mapsto y_h(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Un exemple avec deux racines réelles

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

Ici $\Delta = 1$, les racines sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$
la solution générale de cette équation homgène à coefficients constants est donc :

$$t \mapsto y(t) = \alpha e^t + \beta e^{2t}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Equation à coefficients constants, deux racines complexes

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r^2 + ar + b = 0$$

$\Delta = a^2 - 4b < 0$, les racines sont $r_1 = \lambda + i\mu$ et $r_2 = \lambda - i\mu$ avec $\lambda = \frac{-a}{2}$ et $\mu = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Les racines sont complexes conjuguées.
Solutions à valeurs complexes, α, $\beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} = \alpha e^{\lambda t} e^{i\mu t} + \beta e^{\lambda t} e^{-i\mu t} \\ &= \alpha e^{\lambda t}(\cos(\mu t) + i\sin(\mu t)) + \beta e^{\lambda t}(\cos(\mu t) - i\sin(\mu t)) \end{aligned}$$

On obtient des solutions à valeurs réeles en prenant les parties réelle et imaginaire de y et, par exemple, $\alpha = 1$ et $\beta = 0$:
$y_1 : t \mapsto e^{\lambda t}\cos(\mu t)$ et $y_2 : t \mapsto e^{\lambda t}\sin(\mu t)$
Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, La solution générale de l'équation homogène est :

$$y : t \mapsto y(t) = \gamma y_1(t) + \delta y_2(t), \quad \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$$

Un exemple avec deux racines complexes : pendule

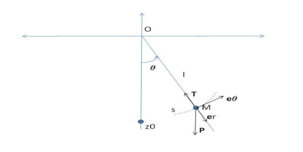

Figure: Système du pendule pesant

$g/l = 1$ (g : gravité, l : la longueur du pendule). On approche $\sin\theta$ par θ en considérant que l'angle θ est petit. Equation du mouvement (avec $y = \theta$) :

$$y''(t) + y(t) = 0$$

Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$, racines : $r_1 = i$ et $r_2 = -i$ ($\lambda = 0$ et $\mu = 1$)

La solution générale (a valeurs dans $\mathbb{R}$) est donc

$$y(t) = \gamma \cos t + \delta \sin t, \quad \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}.$$

Equation à coefficients constants, racine double

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r^2 + ar + b = 0$$

$\Delta = a^2 - 4b = 0$, une racine double $r = -\frac{a}{2}$
Une base de l'ensemble des solutions est alors donnée par les fonctions y_1 et y_2 définies par

$$y_1(t) = e^{rt}, \quad y_2(t) = te^{rt}.$$

La solution générale de l'équation est

$$t \mapsto \alpha e^{rt} + t\beta e^{rt}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Question : comment trouver y_2 ?
Idée : Chercher y_2 à partir de y_1 en posant $y_2(t) = z(t)y_1(t)$ (méthode de réduction d'ordre : on obtient une équation du 1er ordre sur z')
Cette technique fonctionne pour toutes les équations linéaires

Calcul de y_2 par la méthode de réduction d'ordre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\Delta = a^2 - 4b = 0$, une racine double $r = -\frac{a}{2}$, $y_1(t) = e^{rt}$

$$\begin{aligned}
&y_2(t) = z(t)y_1(t) \\
&y_2'(t) = z'(t)y_1(t) + z(t)y_1'(t), \\
&y_2''(t) = z''(t)y_1(t) + 2z'(t)y_1'(t) + z(t)y_1''(t)
\end{aligned}$$

L'équation $y_2'' + ay_2' + b = 0$ devient

$$z''(t)y_1(t) + 2z'(t)y_1'(t) + az'(t)y_1(t) = 0$$

Comme $y_1'(t) = re^{rt}$,

$$z''(t) + (2r + a)z' = 0,$$

On obtient ainsi une équation de premier ordre sur z'.

Ici, $2r + a = 0$ et donc l'équation sur z est $z'' = 0$

Une solution possible est donc $z(t) = t$. Ce qui donne $y_2 = te^t$ (qui est bien une solution linéairement indépendante de y_1).

Exercice, retour sur le cas deux racines réelles

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$r^2 + ar + b = 0$$

$\Delta = a^2 - 4b > 0$, et les racines sont $r_1 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$
On pose $y_1(t) = e^{r_1 t}$ et on cherche y_2 sous la forme
$y_2(t) = z(t)y_1(t)$
L'exercice consiste à montrer que l'on trouve bien ainsi la solution
$y_2(t) = e^{r_2 t}$
L'équation sur z' est $z''(t) + (2r_1 + a)z' = 0$
$2r_1 + a = -\sqrt{\Delta} = r_1 - r_2$

Un exemple avec une racine double

$$y''(t) - 2y(t) + y(t) = 0$$

Polynôme caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, racine double $r = 1$, solution générale :

$$t \mapsto y(t) = \alpha e^t + \beta t e^t, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Equation non homogène

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t), \quad t \in I$$

I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, (par exemple $I =]A, B[$), et les fonctions f, a et b, sont connues et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Etape 1 On cherche la solution générale de l'équation homogène associée. Ell est de la forme $t \mapsto y_h(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

Etape 2 Deux méthodes :

Méthode 1 : Recherche d'une solution particulière. On "devine" une solution particulière y_p. La solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = \underbrace{\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}_{\text{solution de l'équation homogène}} + y_p(t)$$

Méthode 2 : Méthode de la variation des constantes. Cette méthode donne une solution particulière ou, plus directement, l'ensemble des solutions de l'équation non homogène. Elle est décrite dans l'exercice 3 du partiel de 2019

Equation non homogène, Exemple 1

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}$$

Solution générale de l'équation homogène associée

$$t \mapsto y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{2t}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \gamma e^{-t}$

$$\begin{aligned} y_p''(t) - 3y_p'(t) + 2y_p(t) &= \gamma e^{-t} + 3\gamma e^{-t} + \gamma e^{t} \\ &= 6\gamma e^{-t} = e^{-t} \end{aligned}$$

Ce qui donne $y_p(t) = \frac{1}{6} e^{-t}$. La solution générale est donc

$$t \mapsto y(t) = \alpha e^{t} + \beta e^{2t} + \frac{1}{6} e^{-t}, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Remark : Cas d'un second membre appartenant a l'e.v. des solutions de l'équation homogène associée. Si nous avions eu comme second membre $f(t) = e^{t}$, nous aurions cherché une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \gamma t e^{t}$

Equation non homogène, Exemple 2

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = sin(t)$$

Solution générale de l'équation homogène associée

$$t \mapsto y(t) = \alpha e^t + \beta t e^t, \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \alpha sin(t) + \beta cos(t)$

$$\begin{aligned} & y_p''(t) - 2y_p'(t) + y_p(t) = \\ & (\alpha + 2\beta - \alpha) sin(t) + (\beta - 2\alpha - \beta) cos(t) = sin(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$ et $y_p(t) = \frac{1}{2} cos(t)$.
La solution générale est

$$t \mapsto y(t) = \alpha e^t + \beta t e^t + \frac{1}{2} cos(t), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

Equation non homogène, Exemple 3

Le pendule linéarisé avec second membre

$$y''(t) + y(t) = \sin(t)$$

Solution générale de l'équation homogène associée

$$t \mapsto y_h(t) = \alpha sin(t) + \beta cos(t), \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

On cherche y_p sous la forme $y_p(t) = \gamma t \sin(t) + \delta t \cos(t)$

$$y_p''(t) + y_p(t) = -2\delta \sin(t) + 2\gamma \cos(t) = \sin t$$

$\delta = -\frac{1}{2}$ et $\gamma = 0$, $y_p(t) = -\frac{1}{2} t \cos(t)$ La solution générale est

$$t \mapsto y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \alpha sin(t) + \beta cos(t) - \frac{1}{2} t \cos t.$$

La fonction y est donc non bornée, ce phénomène s'appelle "résonnance", dû au fait que y_h et *sin* ont même période

Résonance

La résonance est à l'origine de l'effondrement de structures apparemment très solides

Question : que se passe-t-il pour une équation non linéaire ?

Equation du pendule sans l'hypothèse de petits angles :

$$y''(t) + sin(y(t)) = f(t),\ t > 0$$

Pour cette équation non linéaire, on peut montrer, mais cela est difficile, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout t implique que y est bornée.

Moralité : La non linéarité peut "sauver la structure"

Tacoma bridge (1940) : exemple difficile de couplage de résonnance (compris vers 1980). Exemple simple dans le projet à faire pour cette UE

Equation du pendule

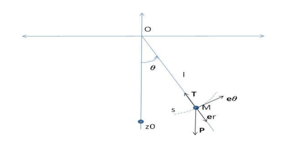

Figure: Système du pendule pesant

$x(t)$: position du point M à l'instant t, $x(t) = \begin{bmatrix} \ell sin(\theta(t)) \\ -\ell cos(\theta(t)) \end{bmatrix}$

Energie cinétique : $\frac{1}{2} m\ell^2\theta'(t)^2$

Energie potentielle : mgh, $h = -\ell cos(\theta(t))$

conservation de l'energie : $\frac{1}{2} m\ell^2\theta'(t)^2 - mg\ell cos(\theta(t))$ est constant

Ceci donne $\ell^2\theta'(t)\theta''(t) + g\ell sin(\theta(t))\theta'(t) = 0$

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} sin(\theta(t)) = 0$$