C4, Calcul des solutions, équations du 1er ordre

Objectif : Présenter des schémas numériques permettant un calcul approché de la solution des équations différentielles.

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in]0, T[= I, \quad 0 < t < T \leqslant +\infty,$$
$$y(0) = y_0,$$

où T, f et y_0 sont données ($t_0 = 0$)
La fonction f appartient à $C([0, T[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.
On note y la solution maximale, elle est définie sur $[0, T_m[$ où $0 < T_m \leqslant T$. On cherche à calculer y

Comment calculer y ?

Premier exemple

Problème de Cauchy avec une solution explicite

$$y'(t) = y(t)(1 - y(t)),\ t > 0,$$
$$y_0 = \frac{1}{2}.$$

Pour ce problème, la solution s'exprime avec des fonctions usuelles

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

Sur un tel exemple, l'intérêt d'un calcul approché n'est pas clair. Mais, avec ce type d'exemple, nous pourrons tester la vitesse de convergence des schémas numériques que nous allons développer (voir le tp1)

Deuxième exemple

Problème de Cauchy sans solution explicite

$$
\begin{aligned}
&y'(t) = y(t)(1 + e^{-y(t)}) + e^{2t},\ t > 0,\\
&y_0 = 0.
\end{aligned}
$$

On peut montrer (exercice. . .) que ce problème admet une (unique) solution globale mais on ne sait pas exprimer cette solution à partir de fonctions “usuelles”,
Grâce aux schémas numériques que nous allons présenter maintenant nous allons pouvoir calculer des approximations aussi précises que l'on veut de cette solution exacte (et nous pourrons aussi comparer les vitesses de convergence des méthodes proposées, voir le tp1)

Principe général

y est la solution maximale.On choisit α, $0 < \alpha < T_m$
La fonction $y \in C([0,\alpha],\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} &y'(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < t \leq \alpha, \\ &y(0) = y_0. \end{aligned}$$

Objectif : calculer y
Pour cela, on divise l'intervalle $[0,\alpha]$ en N sous-intervalles, où $N \in \mathbb{N}^*$, et on note $h = \frac{\alpha}{N}$
h s'appelle le pas de temps
On pose $t_n = nh$ pour $n \in \{0, \ldots, N\}$ et on note y_n l'approximation recherchée de $y(t_n)$, pour $n \in \{0, \ldots, N\}$.
Un schéma numérique est une méthode de calcul des nombres y_n, pour $n \in \{0, \ldots, N\}$

Euler Explicite, EE

La fonction $y \in C([0, \alpha], \mathbb{R})$.
On suppose que y est de classe C^2 sur $]0, \alpha[$ et que
$M_2 = \max\{|y''(s)|, \, s \in]0, \alpha[\} < +\infty$
Un développement de Taylor nous donne pour tout n

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = \underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)} + \varepsilon_n$$

avec $|\varepsilon_n| \leqslant hM_2$
Suggestion pour calculer une valeur approchée de $y(t_n)$:

$$\forall n \in \{0, \ldots, N-1\}, \quad y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

A partir de y_0, qui est connu, on calcule ainsi tous les y_n
Le terme ε_n est appelée *erreur de consistance* du schéma EE

Questions naturelles

1. En général $y_n \neq y(t_n)$, mais a-t-on convergence (quand $h \to 0$) de y "approchée" vers y "exacte"?
2. Si oui à la question 1, à quelle vitesse converge-t-elle ? à quel ordre par rapport à h ?

On pose $e_n = |y_n - y(t_n)|$
Cette erreur est appelée *erreur de discrétisation*
On va montrer que

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} e_n \leqslant Dh \tag{1}$$

où $D \in \mathbb{R}$ ne dépend que de y_0, f, α.
L'inégalité (1) dit que l'erreur est au moins d'ordre 1
Plus généralement, un schéma est dit au moins d'ordre k (avec $k \geq 1$), si il satisfait l'inégalité (1) avec Dh^k au lieu de Dh

Estimation d'erreur pour le schéma EE (1)

$y \in C([0,\alpha],\mathbb{R})$. Il existe $A \in \mathbb{R}$, $|y(t)| \leq A$ pour tout $t \in [0,\alpha]$
on suppose que y est de classe C^2 sur $]0,\alpha[$ et que
$M_2 = \max\{|y''(s)|,\, s \in]0,\alpha[\} < +\infty$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad \forall n \in \{0,\dots,N-1\},$$
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + \varepsilon_n, \quad |\varepsilon_n| \leq h^2 M_2.$$

En soustrayant,

$$y_{n+1} - y(t_{n+1}) = y_n - y(t_n) + h(f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))) - \varepsilon_n$$

En passant en valeur absolue on a donc:

$$e_{n+1} \leqslant e_n + h|f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))| + h^2 M_2.$$

On aimerait utiliser le caractère localement lipschitzien de f.
On sait que $|y(t_n)| \leq A$, mais existe-il B, $|y_n| \leq B$?
Si oui : $e_{n+1} \leq e_n + hCe_n + h^2 M_2$

Estimation d'erreur pour le schéma EE (2)

On choisit $B > A$ (par exemple $B = A + 1$)

On suppose $y_n \leq B$ pour tout n

$C = C_{\alpha,B}$ (constante de Lipschitz sur $[0,\alpha] \times [-B, B]$)

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\leqslant e_n + h|f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n))| + h^2 M_2 \\ &\leq e_n + hCe_n + h^2 M_2 = (1 + hC)e_n + h^2 M_2 \end{aligned}$$

$$\frac{e_{n+1} - e_n}{h} \leq Ce_n + hM_2$$

Analogue discret ($\varphi \geq 0$) de $\varphi'(t) \leq C\varphi(t) + E$ qui donne $\varphi(t) \leq \varphi(0)e^{Ct} + (E/C)(e^{Ct} - 1)$

Ici on obtient $e_n \leq Dh$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$ avec

$$D = \frac{M_2}{C}(e^{\alpha C} - 1)$$

Majoration de e_n

$e_{n+1} \leqslant b e_n + \beta$, $b = (1 + hC)$, $\beta = h^2 M_2$.

$F_n = \dfrac{e_n}{b^n}$, de sorte que $F_{n+1} \leqslant F_n + \dfrac{\beta}{b^{n+1}}$

$G_{n+1} = G_n + \frac{\beta}{b^{n+1}}, \quad G_0 = F_0 = 0$

On montre par récurrence (exercice) que $F_n \leq G_n$ pour tout n.

Puis, on calcule G_n,

$$G_n = G_{n-1} + \frac{\beta}{b^n} = G_{n-2} + \frac{\beta}{b^{n-1}} + \frac{\beta}{b^n} = G_0 + \frac{\beta}{b} + \ldots + \frac{\beta}{b^n}.$$

$$F_n \leq G_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\beta}{b^p} = \frac{\beta}{b}\left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{b^p}\right) = \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1 - \frac{1}{b^n}}{1 - \frac{1}{b}} = \frac{\beta}{b-1} \frac{b^n - 1}{b^n}$$

$$e_n = b^n F_n \leq \frac{\beta}{b-1}(b^n - 1) \leqslant \frac{M_2 h^2}{hC}((1 + hC)^n - 1)$$

$1 + hC \leqslant e^{hC}$, $Nh = \alpha$, $n \leq N$

$$e_n \leqslant \frac{M_2}{C} h(e^{nhC} - 1) \leqslant \frac{M_2}{C}(e^{\alpha C} - 1)h = Dh$$

Estimation d'erreur pour le schéma EE (3)

Il reste à montrer que $y_n \leq B$ pour tout n
on définit h_0 par la formule (avec $C = C_{\alpha,B}$)

$$Dh_0 = \frac{M_2}{C}(e^{\alpha C} - 1)h_0 = B - A.$$

On remarque alors que si $h \leq h_0$ la formule $e_n \leq Dh$ donne

$$|y_n| \leq |y(t_n)| + (B - A) \leq B.$$

Une récurrence simple sur n permet alors de montrer que $y_n \in [-B, B]$ pour tout n. Plus précisément, $y_0 \in [-B, B]$ et si $y_p \in [-B, B]$ pour $p \leq n$, les calculs précédents, valables jusqu'à l'ordre n, donnent $e_{n+1} \leq Dh$ et donc $y_{n+1} \in [-B, B]$.

On obtient donc $e_n \leq Dh$ pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$ si $h \leq h_0$

Premier schéma d'ordre 2, CN

Objectif : $e_n \leq Dh^2$

$y \in C([0,\alpha],\mathbb{R})$ et on suppose que y est de classe C^3 sur $]0,\alpha[$ et que $M_3 = \max\{|y'''(s)|,\, s \in]0,\alpha[\} < +\infty$

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in]0,\alpha[,$$
$$y(0) = y_0$$

$N \in \mathbb{N}^\star$, $h = \alpha/N$, $t_n = nh$ pour $n \in \{0,\ldots,N\}$ y_n approximation recherchée de $y(t_n)$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))ds = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + h\varepsilon_n,$$
$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}[\underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)} + \underbrace{f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}_{y'(t_{n+1})}] + \tilde{\varepsilon}_n$$

$|\tilde{\varepsilon}_n| \leqslant M_3 h^3$. $y_{n+1} = y_n + (h/2)(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$?

Schéma de Heun (Runge Kutta 2)

$y_{n+1} = y_n + (h/2)(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$
Inconvénient : consistance d'ordre 2 mais schéma implicite
Schéma avec une consistance d'ordre 2 mais explicite ?
Schéma de Heun (RK2) :

$$y_{n+1} = y_n + (h/2)(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)))$$

Le schéma est d'ordre 2 :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{2}[f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_n) + hf(t_n, y_n))] + \tilde{\tilde{\varepsilon}}_n,$$

avec $|\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n] \leqslant \tilde{M}_3 h^3$
La démonstration de $|\tilde{\varepsilon}_n| \leqslant M_3 h^3$ et $|\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n] \leqslant \tilde{M}_3 h^3$ est fastidieuse (mais conceptuellement assez simple). Elle consiste seulement à utiliser des développements de Taylor.

Schéma de Heun, erreur de discrétisation

$e_n = |y(t_n)) - y_n|$
De manière très semblable au cas du schéma EE, on obtient

$$e_n \leq Dh^2 \text{ pour tout } n \in \{0, \ldots, N\}$$

Intégration numérique, formule de Simpson

Pour une fonction g de classe C^4 et $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

$$\int_a^b g(t)dt = \frac{h}{6}(g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)) + \varepsilon$$

avec $|\varepsilon| \leq M(b-a)^5$
Ceci donne

$$\int_a^{a+h} g(s)ds = \frac{h}{6}\left(g(a) + 4g\left(a + \frac{h}{2}\right) + g(a+h)\right) + \varepsilon_3,$$

avec $|\varepsilon_3| \leq Mh^5$

Schéma RK4 (Runge Kutta 4), calcul liminaire

La formule de Simpson nous donne la formule suivante

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \frac{h}{6}[f(t_n, y(t_n)) + 4f(t_n + \frac{h}{2}, y(t_n + \frac{h}{2})) \\ + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))] + \varepsilon_n,$$

où $|\varepsilon_n| \leqslant M_5 h^5$ (M_5 ne dépendant que des dérivées de y jusqu'à l'ordre 5).
Comme on souhaite avoir un schéma explicite, on montre qu'il est possible, pour la partie droite de cette formule, de remplaçer les quantités $y(t_n + h/2)$ et $y(t_{n+1})$ par des quantités calculées à partir de $y(t_n)$, en ayant toujours une erreur de consistance en h^5 (calcul fastidieux)

Schéma RK4

On obtient alors le schéma RK4 qui s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[f(t_n, y_n) + 2f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,1}) + 2f(t_n + \frac{h}{2}, y_{n,2}) \\ + f(t_{n+1}, y_{n,3})],$$

où $y_{n,1} = y_n + (h/2)f(t_n, y_n)$, $y_{n,2} = y_n + (h/2)f(t_n + h/2, y_{n,1})$, $y_{n,3} = y_n + hf(t_n + h/2, y_{n,2})$.

Pour ce schéma, avec les mêmes méthodes que précédemment (développement de Taylor, bornes sur y_n) on montre que l'erreur de discrétisation (notée e_n) est en h^4 (le schéma est donc d'ordre au moins 4)

Schémas implicites, équation linéaire

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), \quad t > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution : $y(t) = e^{-t}$. $y(t) > 0$ pour tout t.

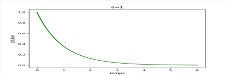

Figure: Solution exacte

Schéma EE : $y_{n+1} = y_n - hy_n$, $y_n = (1-h)^n$, à éviter si $h > 1$

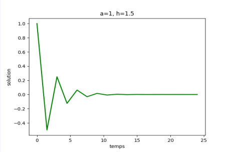

Figure: Solution approchée avec EE, $h = 1.5$

Schémas implicites, équation linéaire (2)

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Schéma EI : $y_{n+1} = y_n - hy_{n+1}$, $y_n = \frac{1}{(1+h)^n}$, $y_n > 0$ pour tout n

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t > 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solution : $y(t) = e^t$. $y(t) > 0$ pour tout t.

Schéma EE : $y_{n+1} = y_n + hy_n$, $y_n = (1+h)^n$, $y_n > 0$ pour tout n
Schéma EI : $y_{n+1} = y_n + hy_{n+1}$, $y_n = \frac{1}{(1-h)^n}$, à éviter si $h > 1$

Schémas implicites, équation non linéaire

$$\begin{cases} y'(t) = -\sqrt{y(t)}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solution : $y(t) = (1 - t/2)^2$ si $t \leq 2$ et $y(t) = 0$ si $t > 2$.
Schéma EE : Pour $y_n \geq 0$ $y_{n+1} = y_n - h\sqrt{y_n}$
Schéma EI : $y_{n+1} = y_n - h\sqrt{y_{n+1}}$, avec $y_{n+1} > 0$
Ceci donne $y_{n+1} = z_{n+1}^2$ avec $z_{n+1} = (1/2)(-h + \sqrt{h^2 + 4y_n})$

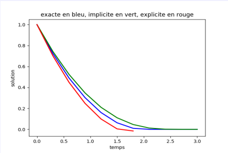

Figure: $h = 3/10$, solution EE négative pour $t = 1.8$

Solution exacte en bleu, solution EI en vert, Solution EE en rouge, cette dernière devient négative pour $t = 1.8$ lorsque $h = 3/10$

Schémas implicites, équation non linéaire (2)

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solution : $y(t) = 1/(1-t)$
Schéma EE : $y_{n+1} = y_n + hy_n^2$
Schéma EI : $y_{n+1} = y_n + hy_{n+1}^2$, avec $y_{n+1} > 0$

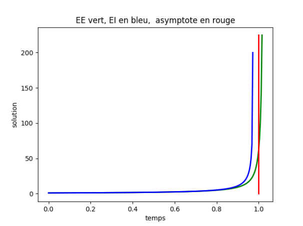

Figure: Asymptote de la solution exacte en rouge, EE en vert, EI en bleu