C10, Preuves des théorèmes sur la stabilité

Système autonome

$$X'(t) = f(X(t)), \quad t > 0$$

Point d'équibre a (c'est-à-dire que $f(a) = 0$)
La fonction constante égale à a est donc une solution du système.
C'est une solution "stationnaire"
Stabilité de cette solution stationnaire ?
(On dit aussi "stabilité de a")
Objectif :

1. Systèmes linéaires pour $n = 1$ puis $n = 2$ (le cas $n > 2$ est semblable au cas $n = 2$)
2. Systèmes non linéaires pour $n = 1$ puis $n = 2$ (le cas $n > 2$ est semblable au cas $n = 2$)

Stabilité des points d'équilibre (systèmes autonomes)

$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$

On considère le problème de Cauchy :

$$X'(t) = f(X(t)), \quad 0 < t < +\infty \tag{1a}$$

$$X(0) = X_0 \tag{1b}$$

1. On dit que a est (uniformément) stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leqslant \delta \Rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (1) a une solution globale}, X \\ et \sup_{t \in [0,+\infty[} \|X(t) - a\| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

2. Le point a est instable si il n'est pas stable...
3. On dit que a est asymptotiquement stable si a est stable et si il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leqslant \delta \Rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (1) a une solution globale}, X \\ et \lim_{t \to +\infty} \|X(t) - a\| = 0. \end{cases}$$

Stabilité de 0 pour les systèmes autonomes linéaires

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0 \tag{2}$$

0 est point d'équilibre

Question : Est-il stable ? On va montrer :

1. Si $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, alors 0 est stable et même asymptotiquement stable.
2. Si il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors 0 est instable
3. On suppose que $\Re(\lambda) \leqslant 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$ et qu'il existe au moins un $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$.
   Alors 0 est stable et si et seulement si $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ pour tout λ tel que $\Re(\lambda) = 0$.
   Mais 0 n'est pas asymptotiquement stable

Stabilité ou instabilité de 0, systèmes linéaires, $n = 1$

$a \in \mathbb{R}$

$$x'(t) = ax, \ t > 0$$
$$x(0) = x^{(0)}$$

La solution de l'équation est $x(t) = x^{(0)} e^{at}$

1. Si $a \leqslant 0$, alors $|x(t)| \leqslant |x^{(0)}|$ et il y a stabilité (uniforme) (on peut prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition de stabilité)
2. Si $a < 0$, on a en plus $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$ et il y a donc stabilité asymptotique .
3. Si $a > 0$, $x^{(0)} \neq 0$ alors $\sup_{t \in [0,+\infty[} |x(t)| = +\infty$, l'équilibre est donc instable

$n > 1$, Notations et majoration de la norme de AX

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| = \max\{|x_i|,\ i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \max\{|a_{i,j}|,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$$

$\|AX\| = \max\{|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j|,\ i \in \{1, \ldots, n\}\} \leq n\|A\|\|X\|$

Pour $n = 2$, $\|AX\| \leq 2\|A\|\|X\|$

$n = 2$, $\Re(\lambda_1) < 0$, $\Re(\lambda_2) < 0$, A diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$, $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$ et $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$X^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t}\varphi_1,\ X^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t}\varphi_2,$
$M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & X^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
La solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = M(t)C$ avec $C \in \mathbb{R}^2$
La solution de $X' = AX$ avec la condition initiale est
$X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$.
$\|X(t)\| \leq 2\|M(t)\|\|M(0)^{-1}X(0)\| \leq 4\|M(t)\|\|M(0)^{-1}\|\|X(0)\|$

1. $\|M(t)\| \leqslant ae^{\lambda_2 t}$, et $a > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
2. $\|X(t)\| \leqslant b\|X(0)\|e^{\lambda_2 t}$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité de 0. Puis, comme $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$, on obtient même la stabilité asymptotique

$n = 2$, $\Re(\lambda_1) < 0$, $\Re(\lambda_2) < 0$, A diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$\lambda_1 = \lambda = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ \alpha < 0,\ \beta \neq 0$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ et $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2)$,
$X^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2)$
$M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & X^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
La solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = M(t)C$ avec $C \in \mathbb{R}^2$
La solution de $X' = AX$ avec la condition initiale est
$X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$.
$\|X(t)\| \leq 2\|M(t)\|\|M(0)^{-1}X(0)\| \leq 4\|M(t)\|\|M(0)^{-1}\|\|X(0)\|$

1. $\|M(t)\| \leqslant ae^{\alpha t}$, et $a > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
2. $\|X(t)\| \leqslant b\|X(0)\|e^{\alpha t}$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité de 0. Puis, comme $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$, on obtient même la stabilité asymptotique

$n = 2$, $\Re(\lambda) < 0$ pour tout λ, A non diagonalisable

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < 0,\ m_a(\lambda) = 2,\ m_g(\lambda) = 1$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi = \lambda\varphi$,
$X^{(1)}(t) = e^{\lambda t}\varphi$, $X^{(2)}(t) = e^{\lambda t}(\psi + t\varphi)$, $\{\varphi, \psi\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$M(t) = \left[X^{(1)}(t) \quad X^{(2)}(t)\right] \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
La solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = M(t)C$ avec $C \in \mathbb{R}^2$
La solution de $X' = AX$ avec la condition initiale est
$X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$.
$\|X(t)\| \leq 2\|M(t)\|\|M(0)^{-1}X(0)\| \leq 4\|M(t)\|\|M(0)^{-1}\|\|X(0)\|$

1. $\|M(t)\| \leqslant ae^{(\lambda/2)t}$, et $a > 0$ ne dépend que de φ, ψ et λ
2. $\|X(t)\| \leqslant b\|X(0)\|e^{(\lambda/2)t}$ et $b > 0$ ne dépend que φ, ψ et λ

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité de 0. Puis, comme $\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0$, on obtient même la stabilité asymptotique

$n = 2$, Il existe λ t.q. $\Re(\lambda) > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda < 0,$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi \neq 0$

Soit $\varepsilon > 0$, la fonction $X(t) = \varepsilon e^{\lambda t}\varphi$ est la solution de $X' = AX$ avec la donnée initiale $X(0) = \varepsilon\varphi$.

$\sup_{t>0} \|\varepsilon X(t)\| = |\varepsilon| \|\varphi\| \sup_{t>0} e^{\lambda t} = +\infty$

$\|X(0)\| = |\varepsilon| \|\varphi\|$ est arbitrairement petite

Ceci montre que 0 est un équilibre instable

$n = 2$, Il existe λ t.q. $\Re(\lambda) > 0$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{R},\ \alpha > 0,\ \beta \neq 0$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi = \lambda\varphi$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$
Soit $\varepsilon > 0$, la fonction $X(t) = \varepsilon e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2)$ est la solution de $X' = AX$ avec la donnée initiale $X(0) = \varepsilon\varphi_1$.
$\sup_{t>0} \|\varepsilon X(t)\| = |\varepsilon| \sup_{t>0} e^{\alpha t}\|\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2\| = +\infty$
$\|X(0)\| = |\varepsilon|\|\varphi_1\|$ est arbitrairement petite
Ceci montre que 0 est un équilibre instable

$\Re(\lambda_2) \leq \Re(\lambda_1) = 0$, $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1)$, A diag. dans $\mathbb{R}$

A non diagonalisable est impossible (car $n = 2$)
$\lambda_2 \leq \lambda_1 = 0$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi_1 = 0$, $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$ et $\{\varphi_1,\ \varphi_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$X^{(1)}(t) = \varphi_1$, $X^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t}\varphi_2$,
$M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & X^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
La solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = M(t)C$ avec $C \in \mathbb{R}^2$
La solution de $X' = AX$ avec la condition initiale est
$X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$.
$\|X(t)\| \leq 2\|M(t)\|\|M(0)^{-1}X(0)\| \leq 4\|M(t)\|\|M(0)^{-1}\|\|X(0)\|$

1. $\|M(t)\| \leqslant a$, et $a > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
2. $\|X(t)\| \leqslant b\|X(0)\|$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité de 0. Il n'y a pas stabilité asymptotique car $\varepsilon\varphi_1$ est solution pour tout ε

$\Re(\lambda_2) \leq \Re(\lambda_1) = 0$, $m_g(\lambda_1) = m_a(\lambda_1)$, A diag. dans $\mathbb{C}$

$\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0,\ X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi = i\beta\varphi$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ et $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$X^{(1)}(t) = \cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2$,
$X^{(2)}(t) = \sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2$,
$M(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) & X^{(2)}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
La solution générale de $X' = AX$ est $X(t) = M(t)C$ avec $C \in \mathbb{R}^2$
La solution de $X' = AX$ avec la condition initiale est
$X(t) = M(t)M(0)^{-1}X(0)$.
$\|X(t)\| \leq 2\|M(t)\|\|M(0)^{-1}X(0)\| \leq 4\|M(t)\|\|M(0)^{-1}\|\|X(0)\|$

1. $\|M(t)\| \leqslant a$, et $a > 0$ ne dépend que de φ_1 et φ_2
2. $\|X(t)\| \leqslant b\|X(0)\|$ et $b > 0$ ne dépend que φ_1 et φ_2

En posant $\delta = \varepsilon/b$ on obtient la stabilité de 0. Il n'y a pas stabilité asymptotique car $\varepsilon X^{(1)}$ est solution pour tout ε

$\Re(\lambda_2) \leq \Re(\lambda_1) = 0, \; m_g(\lambda_1) < m_a(\lambda_1)$

$0 \in Sp(A)$ et $m_a(0) = 2, \; m_g(0) = 1$

$$X'(t) = AX(t), \; t > 0, \; X(0) = X^{(0)}$$

$A\varphi = 0$
$X^{(1)}(t) = \varphi, \; X^{(2)}(t) = (\psi + t\varphi),$ $\{\varphi, \psi\}$ base de $\mathbb{R}^2$
$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|X^{(2)}(t)\| = +\infty$.
Il y a donc équilibre instable en 0, car $\|\varepsilon X^{(2)}(0)\| = |\varepsilon| \|\psi\|$ est aussi petit que l'on veut alors que $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|\varepsilon X^{(2)}(t)\| = +\infty$ (pout tout $\varepsilon \neq 0$)

Exemple, pendule linéairisé

$$y_1'(t) = y_2(t),\ t > 0,$$
$$y_2'(t) = -y_1(t),\ t > 0,$$

qui s'écrit $Y' = AY$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Le polynôme caractéristique associé à A est $P_A(X) = X^2 + 1$. Les valeurs propres sont donc $\lambda = \pm i$.

Selon le slide précédent, 0 est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

Stabilité pour les systèmes non linéaires autonomes

$$X'(t) = f(X(t)), \quad t > 0$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(a) = 0$. On note A la matrice jacobienne de f au point a

Le point a est-il stable ou instable ?

1. Si $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, alors a est asymptotiquement stable
2. Si il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors a est instable

Cas $n = 1$, $A = f'(a)$

Cas $n = 2$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}$

Stabilité, équation non linéaire ($n = 1$)

$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(a) = 0,\ f'(a) < 0$

$$x'(t) = f(x(t)),\ t > 0,\ x(0) = x_0$$

Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $f'(z) < 0$ pour tout z tel $|a - z| \leq \delta_0$.
$f(z) = f(z) - f(a) = f'(\theta)(z - a) > 0$ si $a - \delta_0 \leq z < a$, (TAF)
$f(z) = f(z) - f(a) = f'(\theta)(z - a) < 0$ si $a < z < a + \delta_0$ (TAF)
Soit x la solution maximale avec la condition initiale $x(0)$
Si $a - \delta_0 \leq x(0) < a$, la fonction x est strictement croissante et $0 < x(t) < a$ pour tout $t \in]0, T_m[$. Donc, $T_m = +\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = a$
On a utilisé le fait que les trajectoires ne se rencontrent pas et qu'il n'y a pas de point d'équilibre entre $a - \delta_0$ et a
Si $a < x(0) \leq a + \delta_0$, un raisonnement analogue donne que x est strictement décroissante et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = a$
Ceci montre la stabilité asymptotique de a

Instabilité, équation non linéaire ($n = 1$)

$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(a) = 0,\ f'(a) > 0$

$$x'(t) = f(x(t)),\ t > 0,\ x(0) = x_0$$

Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $f'(z) > 0$ pour tout z tel $|a - z| \leq \delta_0$
$f(z) = f(z) - f(a) = f'(\theta)(z - a) < 0$ si $a - \delta_0 \leq z < a$, (TAF)
$f(z) = f(z) - f(a) = f'(\theta)(z - a) > 0$ si $a < z < a + \delta_0$ (TAF)
Soit x la solution maximale avec la condition initiale $x(0)$
Si $a - \delta_0 \leq x(0) < a$, la fonction x commence par être strictement décroissante et le reste tant que $a - \delta_0 < x(t) < a$.
Mais $a - \delta_0 < x(t) < a$ pour tout $t \in]0, T_m[$ est impossible car cela donnerait $T_m = +\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \ell \in [a - \delta_0, a[$. Donc $f(\ell) = 0$, ce qui est impossible
Conclusion : Il existe $t > 0$ tel que $x(t) = a - \delta_0$.
Le point d'équilibre a est instable

Développement au 1er ordre de f, $n = 2$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $a \in \mathbb{R}^2$
$f(X) = f(a) + A(X - a) + \|X - a\|\varepsilon(X)$, où $\lim_{X \to a} \varepsilon(X) = 0$ et
A est la matrice jacobienne de f au point a.
$f(a) = 0$, $X'(t) = f(X(t))$, $Y(t) = X(t) - a$,

$$Y'(t) = X'(t) = f(Y(t) + a) = AY(t) + g(Y(t)),$$

avec $g(Y(t)) = \|Y(t)\|\varepsilon(Y(t))$ où $\lim_{Y \to 0} \varepsilon(Y) = 0$.
La stabilité ou l'instabilité de a pour $X'(t) = f(X(t))$ est identique à la stabilité ou l'instabilité de 0 pour $Y'(t) = AY(t) + g(Y(t))$
Remarque : $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Stabilité pour un système autonome non linéaire

$g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $g(Y) = \|Y\| \varepsilon(Y)$ avec $\lim_{Y \to 0} \varepsilon(Y) = 0$,
0 est un point d'équilibre du système

$$Y'(t) = AY(t) + g(Y(t)),$$

On suppose que $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$

Objectif : Montrer que 0 est asymptotiquement stable

Calcul liminaire

Soit Y la solution maximale de $Y'(t) = AY(t) + g(Y(t))$ avec donnée initiale $Y(0)$, cette solution est donc définie sur $[0, T_m[$

On pose $C(t) = e^{-At}Y(t)$ et on a donc $Y(t) = e^{At}C(t)$.

$$Y'(t) = Ae^{At}C(t) + e^{At}C'(t) = AY(t) + e^{At}C'(t),$$
$$AY(t) + g(Y(t)) = AY(t) + e^{At}C'(t)$$

Ceci donne que $C'(t) = e^{-At}g(Y(t))$

$$C(t) = \int_0^t C'(s)ds + C(0) \text{ et } C(0) = Y(0)$$

on obtient

$$C(t) = Y(0) + \int_0^t e^{-As}g(Y(s))ds.$$

On en déduit la formule suivante, dite formule de Duhamel:

$$Y(t) = e^{At}Y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(Y(s))ds, \text{ pour tout } t \in [0, T_m[.$$

Stabilité pour un système autonome non linéaire, $n = 2$

$g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $g(Y) = \|Y\|\varepsilon(Y)$ avec $\lim_{Y\to 0} \varepsilon(Y) = 0$,
0 est un point d'équilibre du système $Y'(t) = AY(t) + g(Y(t))$
$\Re(\lambda_1) \leq \Re(\lambda_2) = 2\alpha < 0$

$$Y(t) = e^{At}Y(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(Y(s))ds, \text{ pour tout } t \in [0, T_m[.$$

Rappel du cas linéaire : $e^{At} = M(t)M(0)^{-1}$, il existe $\tilde{b} \geq 1$ tel que
$\|e^{At}\| \leq \tilde{b}e^{\alpha t}$ pour tout $t \geq 0$, $\|e^{At}Z\| \leq be^{\alpha t}\|Z\|$, $b = 2\tilde{b}$

$$\|Y(t)\| \leqslant be^{\alpha t}\|Y(0)\| + \int_0^t be^{\alpha(t-s)}\|g(Y(s))\|ds \text{ pour tout } t \in [0, T_m[$$

Majoration par “Gronwall”

$$\|Y(t)\| \leqslant be^{\alpha t}\|Y(0)\| + \int_0^t be^{\alpha(t-s)}\|g(Y(s))\|ds \text{ pour tout } t \in [0, T_m[$$

$g(Z) = \|Z\|\varepsilon(Z)$. Il existe $\delta > 0$ t.q.
$\|Z\| \leqslant \delta \Rightarrow \|\varepsilon(Z)\| \leqslant \tilde{\varepsilon} = -\alpha/(2b)$
Soit $0 < T < T_m$. Si $\|Y(s)\| \leqslant \delta$ pour tout $s \in [0, T]$
$\|g(Y(s))\| \leqslant \|Y(s)\|\tilde{\varepsilon}$ et donc, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$e^{-\alpha t}\|Y(t)\| \leqslant \underbrace{b\|Y(0)\| + \int_0^t be^{-\alpha s}\|Y(s)\|\tilde{\varepsilon}ds}_{\varphi(t)}$$

$\varphi'(t) = b\tilde{\varepsilon}\|Y(t)\|e^{-\alpha t} \leqslant b\tilde{\varepsilon}\varphi(t)$.
On en déduit $\varphi(t)e^{-b\tilde{\varepsilon}t} \leqslant \varphi(0)$ et $\varphi(t) \leqslant b\|Y(0)\|e^{b\tilde{\varepsilon}t}$
$\|Y(t)\| \leqslant b\|Y(0)\|e^{b\tilde{\varepsilon}t}e^{\alpha t} = b\|Y(0)\|e^{(\alpha/2)t}$ pour tout $0 \leq t \leq T$

Stabilité, $n = 2$, fin de la preuve

Rappel $\alpha < 0$
Résumé : Soit $0 < T < T_m$. Si $\|Y(s)\| \leqslant \delta$ pour tout $s \in [0, T]$, alors $\|Y(t)\| \leqslant b\|Y(0)\|e^{(\alpha/2)t}$ pour tout $0 \leq t \leq T$
On en déduit que si $\|Y(0)\| \leq \delta/b < \delta$ (car $b \geq 2$) alors $\|Y(t)\| < \delta$ pour tout $0 \leq t < T_m$
Sinon, prendre $T < T_m$ t.q. $\|Y(T)\| = \delta$ et $\|Y(s)\| \leq \delta$ pour tout $s \in [0, T]$. On obtient $\|Y(T)\| \leqslant b\|Y(0)\|e^{(\alpha/2)T} < \delta$, impossible

Conclusion : Ceci donne $T_m = +\infty$ et $\|Y(t)\| \leqslant b\|Y(0)\|e^{(\alpha/2)t}$ pour tout $0 \leq t < +\infty$

le point d'équilibre 0 est bien asymptotiquement stable

L'instabilité si il existe λ t.q. $\Re(\lambda) > 0$ est admise

Exemple, modèle de Lotka-Volterra

$a, b, c, d > 0$

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t),\ t > 0, \\
x_2'(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t),\ t > 0
\end{aligned}
$$

Point d'équilibre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$

Le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est instable

Point d'équilibre $\begin{bmatrix} c/d \\ a/b \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $\pm i\sqrt{ac}$. L'analyse du système linéarisé ne permet pas de conclure. Une analyse plus poussée montre qu'il est stable (mais non asymptotiquement stable)

Le pendule pesant non linéarisé

$$y_1'(t) = y_2(t),\ t > 0,$$
$$y_2'(t) = -\sin(y_1(t)),\ t > 0$$

Points d'équilibre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $\pm i$. L'analyse du système linéarisé ne permet pas de conclure. Une analyse plus poussée montre qu'il est stable.

Point d'équilibre $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A sont ± 1. Le point $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ est instable