C6, Systèmes différentielles linéaires

On note $n \geq 1$ le nombre d'équations et d'inconnues du système différentiel linéaire

$$x_i'(t) = a_{i,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{i,n}(t)x_n(t) + g_i(t), \quad t \in I, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

où pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,j}$, $g_i \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$
I un ouvert de $\mathbb{R}$.
Les inconnues sont les fonctions $x_i \in C^1(I, \mathbb{R})$.

Même nombre d'équations et d'inconnues

Problème de Cauchy classique

$I =]t_0, T[$ $(T > t_0)$, $u \in C^1(]t_0, T[) \cap C([t_0, T[)$.

$$x_i'(t) = a_{i,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{i,n}(t)x_n(t) + g_i(t),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ t \in]t_0, T[$$
$$x_i(t_0) = x_i^{(0)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Exercice : Montrer que x est continue à droite en t_0 et que la dérivée à droite vérifie la même équation

Problème de Cauchy "à gauche"

$I =]T, t_0[$ $(T < t_0)$, $u \in C^1(]T, t_0[) \cap C(]T, t_0])$.

$$x_i'(t) = a_{i,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{i,n}(t)x_n(t) + g_i(t),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ t \in]T, t_0[$$
$$x_i(t_0) = x_i^{(0)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

x est continue à gauche en t_0 et que la dérivée à gauche vérifie la même équation

Problème de Cauchy général

La résolution des deux problèmes de Cauchy (problème de Cauchy classique et problème de Cauchy à gauche) est équivalente à la résolution du problème de Cauchy général. On ajoute au système différentielle une condition initiale sur les fonctions inconnues x_i en un point $t_0 \in I$ donné :

$$x_i'(t) = a_{i,1}(t)x_1(t) + \ldots + a_{i,n}(t)x_n(t) + g_i(t),\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ t \in I$$
$$x_i(t_0) = x_i^{(0)},\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Theorem (Existence et unicité)

I un ouvert de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a_{i,j}$, $g_i \in C(I, \mathbb{R})$ $x^0 \in \mathbb{R}^n$ donnés
Alors il existe une et une seule solution au problème de Cauchy général

Preuve : cours 9 dans un cadre plus général

Problème de Cauchy général sous forme matricielle

$$
\begin{aligned}
X'(t) &= A(t)X(t) + G(t), \quad t \in I \\
X(t_0) &= X^{(0)}
\end{aligned}
$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrées d'ordre n)

$$
A(t) = \begin{bmatrix} a_{1,1}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{bmatrix},
$$

et $X'(t)$, $X(t)$, $G(t)$ et $X^{(0)}$ sont des matrices colonne à n lignes, que l'on identifie à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, définis par

$$
X'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \; X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \; G(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}, \text{ et } X^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}
$$

Exemple 1, équations du 2eme ordre

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t),\ t \in I$$

$a, b\ c \in C(I, \mathbb{R})$ (I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$)
Soit x une solution de cette équation (de classe C^2) On pose
$x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$ Les fonctions x_1, x_2 sont de classe C^1

$x_1'(t) = x'(t) = x_2(t)$
$x_2'(t) = x''(t) = -ax'(t) - bx(t) + c(t) = -ax_2(t) - bx_1(t) + c(t).$

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \text{ avec } X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}$$

toutes les équations différentielles linéaires d'ordre n peuvent se mettre sous la forme d'un système différentiel linéaire du premier ordre, de n équations à n inconnues

Exemple 2, couplage partiel

$I = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_1(t) \\
x_2'(t) &= 2x_2(t) + x_1(t),\ t \in I
\end{aligned}
$$

$x_1(t) = C_1 e^t$ avec $C_1 \in \mathbb{R}$
$x_2'(t) = 2x_2(t) + C_1 e^t$, $x_2(t) = C_2 e^{2t} + x_p(t)$ avec $C_2 \in \mathbb{R}$.
$x_p(t) = \alpha e^t$, $\alpha e^t = 2\alpha e^t + C_1 e^t$, $\alpha = 2\alpha + C_1$, $\alpha = -C_1$
$x_2(t) = C_2 e^{2t} - C_1 e^t$

$$
X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}
$$

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2
Base de cet espace : fonctions $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$
$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$, $X^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

Systèmes homogènes

I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ (i.e. $a_{i,j} \in C(I, \mathbb{R})$), $n \geq 1$

$$X'(t) = A(t)X(t),\ t \in I$$

$E_n = \{X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n),\ X$ solution de ce système $\}$

L'ensemble E_n est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$)

En effet, si $X,\ Y \in E_n$ alors $X + Y \in E_n$ car

$$X'(t) + Y'(t) = A(t)X(t) + A(t)Y(t) = A(t)(X(t) + Y(t))$$

Si $X \in E_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha X \in E_n$ car

$$(\alpha X)'(t) = \alpha X'(t) = A(t)(\alpha X(t))$$

Question : Dimension de E_n ?

La dimension de E_n est n

I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $n \geq 1$

$$X'(t) = A(t)X(t),\ t \in I$$

On choisit un point $t_0 \in I$.
Pour $1 \leq i \leq n$. Le théorème sur le problème de Cauchy général donne l'existence (et l'unicité) d'une solution de $X'(t) = A(t)X(t)$ avec la condition en t_0

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ème composante} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

On note $X^{(i)}$ cette solution et on va montrer que les fonctions $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ forme une base de E_n (et donc que $\dim(E_n) = n$)

$\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ est une famille génératrice

$X \in E_n$, $X'(t) = A(t)X(t)$ pour tout $t \in I$
On pose $Y = X - \sum_{j=1}^{n} X_j(t_0)X^{(j)}$
$Y \in E_n$, $Y'(t) = A(t)Y(t)$ pour tout $t \in I$
et $Y(t_0) = 0$
$Y_i(t_0) = X_i(t_0) - \sum_{j=1}^{n} X_j(t_0)X_i^{(j)}(t_0) = X_i(t_0) - X_i(t_0) = 0$
La partie unicité du théorème sur le problème de Cauchy général nous donne alors que $Y = 0$ et donc

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i(t_0)X^{(i)}$$

La famille de fonctions $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ engendre E_n

$\{X^{(1)}, \ldots X^{(n)}\}$ est une famille libre

$\alpha_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, tels que $\alpha_1 X^{(1)} + \ldots + \alpha_n X^{(n)} = 0$
Cette fonction est donc nulle en particulier pour $t_0 = 0$ et donc :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j X^{(j)}(t_0) = 0$$

$$X^{(i)}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ème composante}$$

On en déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$
La famille $\{X^{(1)}, \ldots X^{(n)}\}$ est une famille libre
La famille $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ est donc une base de E_n et on a ainsi prouvé que $\dim E_n = n$

CNS d'indépendance des solutions d'un système différentiel

I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $n \geq 1$

$$X'(t) = A(t)X(t),\ t \in I$$

Soient $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ p solutions de ce système (p éléments de E_n)
On choisit un point $t_0 \in I$, et soit $t_0 \in I$.
$\{X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}\}$ est libre $\Leftrightarrow$ $\{X^1(t_0), \ldots, X^{(p)}(t_0)\}$ est libre
(Sens $\Rightarrow$) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i X^{(i)}(t_0) = 0$.
Comme E_n est un espace vectoriel, $\sum_{i=0}^n \alpha_i X^{(i)} \in E_n$.
La partie unicité du théorème sur le problème de Cauchy général nous donne alors que $\sum_{i=0}^n \alpha_i X^{(i)} = 0$. Comme la famille $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ est une famille libre, on en déduit que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, et donc que la famille (de vecteurs) $\{X^{(1)}(t_0), \ldots, X^{(n)}(t_0)\}$ est libre.
(Sens $\Leftarrow$) Immédiat...

Calcul de E_n, systèmes différentiels linéaires autonomes

$I = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Rappel d'algèbre linéaire Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $(\exists X \neq 0$ tel que $AX = 0) \Leftrightarrow \det A = 0$.
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(\exists X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$ (I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Nous allons distinguer trois cas pour déterminer une base de E_n

1. La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$
2. La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$
3. La matrice A n'est pas diagonalisable

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
On cherche la fonction X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ sous la forme
$X(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\varphi_i$ avec α_i de classe C^1 pour tout i

$$X'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i'(t)\varphi_i \quad \text{et}$$

$$AX(t) = A(\sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\varphi_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) A\varphi_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t)\lambda_i\varphi_i.$$

Le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ est alors équivalent à

$$\alpha_i'(t) = \lambda_i \alpha_i(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\lambda_i t} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

avec $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, suite

$$\alpha_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$$

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \varphi_i, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

Question : A-t-on ainsi tout E_n ?

On pose $X^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t}\varphi_i$ pour $1 \leq i \leq n$, la famille (de fonctions) $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ est une famille libre car les vecteurs $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont indépendants et $X^{(i)}(0) = \varphi_i$

La famille $\{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\}$ est donc une base de E_n

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i X^{(i)}$$

La matrice A diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (mais non dans $\mathbb{R}$)

$n = 2$ pour simplifier

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Il existe $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et il existe $\varphi \in \mathbb{C}^n$ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$.
Comme A est à valeurs réelles, $A\bar{\varphi} = \bar{\lambda}\bar{\varphi}$.
$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^n$, de sorte que

$$A\varphi = \lambda\varphi \Leftrightarrow A(\varphi_1 + i\varphi_2) = (\alpha + i\beta)(\varphi_1 + i\varphi_2).$$

$\varphi_2 \neq 0$ (car $A\varphi_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda\varphi_1 \notin \mathbb{R}^n$ car $\beta \neq 0$).
$\varphi_1 \neq 0$ (car $iA\varphi_2 \in \mathbb{R}^n$ et $i\lambda\varphi_2 \notin \mathbb{R}^n$ car $\beta \neq 0$).
φ_1, φ_2 sont indépendants
Si $\varphi_2 = \gamma\varphi_1$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$, on obtient une contradiction, par exemple, en multipliant l'équation $A\varphi = \lambda\varphi$ par $(1 - i\gamma)$
Solution à valeurs complexes du système différentiel :

$$t \mapsto X(t) = e^{\lambda t}\varphi$$

La matrice A diagonalisable dans $\mathbb{C}$, suite

$n = 2$, $A\varphi = \lambda\varphi$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Solution à valeurs complexes du système différentiel :

$$t \mapsto X(t) = e^{\lambda t}\varphi$$

Pour obtenir des solutions à valeurs réelles, on décompose $X(t)$ en partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\lambda t}\varphi = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(\varphi_1 + i\varphi_2) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2) + ie^{\alpha t}(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2). \end{aligned}$$

Les parties réelle et imaginaire de X sont des solutions à valeurs réelles du système différentiel.

$$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2)$$
$$X^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2)$$

La matrice A diagonalisable dans $\mathbb{C}$, conclusion

$n = 2$, $A\varphi = \lambda\varphi$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

Deux solutions à valeurs réelles du système différentiel :

$$X^{(1)}(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2)$$
$$X^{(2)}(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2)$$

Les fonctions $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire que la famille $\{X^{(1)}, X^{(2)}\}$ est libre) car les vecteurs φ_1, φ_2 sont linéairement indépendants (et $X^{(1)}(0) = \varphi_1$, $X^{(2)}(0) = \varphi_2$).
La dimension de E_2 est 2
Donc $E_2 = \{c_1X^{(1)} + c_2X^{(2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Le cas $n > 2$ se traite de manière similaire en distinguant les valeurs propres réelles et complexes de A.

Exemple où A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Valeurs propres de la matrice A : $\lambda = 1 + i$ (et $\overline{\lambda}$) $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

Vecteur propre associé $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ avec $\varphi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Base de E_2 : $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ définies par

$$X^{(1)}(t) = e^t \left(\cos(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)}(t) = e^t \left(\sin(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = e^t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Donc $E_2 = \{c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

La matrice A est non diagonalisable, exemple

$$X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}$$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $P_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2$

Valeur propre (double) de la matrice A : $\lambda = -1$

Le sous espace propre associé est engendré par $\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Ceci donne une solution du système différentiel, la fonction $X^{(1)}$ définie par

$$X^{(1)}(t) = e^{-t}\varphi$$

Question : Comment en trouver une 2eme (indépendante de φ) ?

Le système s'écrit $x_1'(t) = x_2(t)$, $x_2'(t) = -2x_2(t) - x_1(t)$ et donc

$$x_1''(t) = x_2'(t) = -2x_2(t) - x_1(t) = -2x_1'(t) - x_1(t)$$

Equation diffétentielle du 2eme ordre

La matrice A est non diagonalisable, suite de l'exemple

$$x_1''(t) + 2x_1'(t) + x_1(t) = 0$$

Polynôme caractéristique : $r^2 + 2r + 1$, racine double $r = -1$

Les solutions de cette équation sont les applications

$$t \mapsto x_1(t) = \alpha e^{-t} + \beta t e^{-t},$$

α, β deux constantes réelles arbitraires

$$x_2(t) = x_1'(t) = -\alpha e^{-t} - \beta t e^{-t} + \beta e^{-t}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} t e^{-t} \\ (1-t) e^{-t} \end{bmatrix}.$$

La matrice A est non diagonalisable, conclusion

$$X'(t) = AX(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} X(t),\ t \in \mathbb{R}$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$X^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$, $X^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$

La famille $\{X^{(1)}, X^{(2)}\}$ est libre,

donc $E_2 = \{c_1X^{(1)} + c_2X^{(2)},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Autre écriture de X : $X(t) = e^{-t}\left[\alpha\varphi + \beta(\psi + t\varphi)\right]$

$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \ker(A + I_2)$ (-1 est v.p. double de A)

$\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker((A + I_2)^2)$, $(A + I_2)\psi = \varphi$

Cet exemple sera généralisé dans le cours suivant en introduisant la fonction exponentielle d'une matrice