C9, Systèmes non linéaires

Système non linéaire : I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n \geqslant 1$; on cherche $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ du système différentiel non linéaire suivant :

$$X'(t) = f(t, X(t)), \quad t \in I$$

Problème de Cauchy associé : $t_0 < T \leqslant +\infty$, $I = [t_0, T[$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. On cherche alors $X \in \mathcal{C}([t_0, T[, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(]t_0, T[, \mathbb{R}^n)$ solution du problème de Cauchy :

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(t, X(t)), \quad t_0 < t < T \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{aligned}$$

Modèle de Lotka-Volterra

$a, b, c, d > 0$, le modèle prédateur-proie de Lotka-Volterra s'écrit

$$x_1'(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t),\ \ t > 0,$$
$$x_2'(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t),\ \ t > 0$$

L'inconnue est la fonction $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

La résolution de ce système peut s'effectuer de manière approchée à l'aide d'un schéma numérique (tp4)

Le pendule pesant non linéarisé

$g/l = 1$

$$x''(t) + \sin(x(t)) = 0,\ t > 0$$

Nous pouvons écrire cette équation sous la forme d'un système différentiel non linéaire. On pose $y_1(t) = x(t)$ et $y_2(t) = x'(t)$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t),\ t > 0, \\ y_2'(t) &= -\sin(y_1(t)),\ t > 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce système peut s'effectuer de manière approchée à l'aide d'un schéma numérique (projet de fin d'UE)

Questions naturelles

$t_0 < T \leqslant +\infty$, $I = [t_0, T[$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
&X'(t) = f(t, X(t)), \quad t_0 < t < T \\
&X(t_0) = X^{(0)}
\end{aligned}
$$

1. La solution existe-elle? est-elle unique? est-elle globale ?
2. Quels sont les points d'équilibre du système ?
3. Qu'en est-il de la stabilité de la solution ?
4. Quel est le comportement de la solution lorsque $t \to \infty$?
5. Comment peut-on calculer les solutions ?

Existence locale

$t_0 < T \leqslant +\infty$, $I = [t_0, T[$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, c'est-à-dire que

$$\forall a \in]t_0, T[, \; \forall A \in \mathbb{R}, \; \exists C_{a,A} : \|f(t,X) - f(t,Y)\| \leqslant C_{a,A}\|X - Y\|$$
$$\forall t \in [t_0, a], \quad \forall X, Y \in B_A = \{z \in \mathbb{R}^n, \; \|z\| \leq A\}.$$

Alors il existe $\alpha > 0$ et il existe $X \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + \alpha[, \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}^1(]t_0, t_0 + \alpha[, \mathbb{R}^n)$ solution de

$$X'(t) = f(t, X(t)), \quad t_0 < t < t_0 + \alpha$$
$$X(t_0) = X^{(0)}$$

Exemple de norme sur R^n :

Pour $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\|X\| = \max\{|x_i|, i \in \{1, \dots n\}\}$

Unicité de la solution

$t_0 < T \leqslant +\infty$, $I = [t_0, T[$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument

Alors, pour tout $\alpha > 0$ t.q. $t_0 + \alpha \leqslant T$ le problème de Cauchy

$$X'(t) = f(t, X(t)), \quad t_0 < t < t_0 + \alpha$$
$$X(t_0) = X^{(0)}$$

admet au plus une solution

Solution maximale

$t_0 < T \leqslant +\infty$, $I = [t_0, T[$, $n \geqslant 1$, $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument
Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} X'(t) &= f(t, X(t)), \quad t_0 < t \\ X(t_0) &= X^{(0)} \end{aligned}$$

admet une unique solution maximale, c'est-à-dire une unique solution définie sur l'intervalle $[t_0, T_m[$ et pas de solution sur $[t_0, \tilde{T}[$ si $T_m < \tilde{T} \leq T$)
Si plus, si $T_m < T$ alors $\lim_{t \to T_m} \|X(t)\| = +\infty$

la démonstration de ces 3 résultats (existence locale, unicité, solution maximale) est identique à celle du $n = 1$ en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$

Modèle de Lotka-Volterra

$a, b, c, d > 0$, $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \geq 0$, le problème de Cauchy pour le modèle prédateur-proie de Lotka-Volterra s'écrit

$$\begin{aligned}
&x_1'(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t),\ t > 0,\\
&x_2'(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t),\ t > 0,\\
&x_1(0) = x_1^{(0)},\\
&x_2(0) = x_2^{(0)}
\end{aligned}$$

Les théorèmes d'existence locale et d'unicité s'appliquent assez facilement. Il existe donc une solution maximale. L'existence globale est vraie mais demande un peu plus de travail. (voir l'examen de janvier 2020)

Le pendule pesant non linéarisé

Sous forme système le problème de Cauchy s'écrit, avec la donnée initiale $y_1^{(0)}$ et $y_2^{(0)}$ dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &y_1'(t) = y_2(t),\ t > 0, \\ &y_2'(t) = -\sin(y_1(t)),\ t > 0 \\ &y_1(0) = y_1^{(0)},\ y_2(0) = y_2^{(0)} \end{aligned}$$

On obtient là encore existence local et unicité. Il existe donc une solution maximale définie sur $[0, T_m[$

Existence globale ?

$y_2'(t) = -\sin(y_1(t))$, et donc, pour tout $0 \leq t \leq T_m$, $|y_2'(t)| \leq 1$ et $|y_2(t)| \leq |y_2^{(0)}| + t$

Si $T_m < +\infty$, la fonction y_2 est donc bornée

Comme $y_1'(t) = y_2(t)$, la fonction y_1 est donc aussi bornée

On en déduit que la solution n'explose pas

Conclusion : $T_m = +\infty$

Unicité, problème de Cauchy général

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, c'est-à-dire que pour tout J intervalle compact inclus dans I et tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $C_{J,A}$ t.q.

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant C_{J,A}\|x-y\|,$$
$$\forall t \in J,\ \forall x,y \in B_A = \{z \in \mathbb{R}^n,\ \|z\| \leq A\}.$$

Soient $\alpha,\ \beta > 0,\ t_0 - \alpha, t_0 + \beta \in I$ et $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.
Alors, le problème de Cauchy général

$$X'(t) = f(t, X(t)), t \in I$$
$$X(t_0) = X^{(0)}$$

admet au plus une solution sur l'intervalle $]t_0 - \alpha, t_0 + \beta[$
Preuve : Unicité pour le problème de Cauchy sur $[t_0, t_0 + \beta[$ et pour le problème de Cauchy à gauche sur $]t_0 - \alpha, t_0]$

Les trajactoires ne se rencontrent pas

Rappel : La trajectoire de la solution y est le graphe de y, c'est-à-dire de l'application $t \mapsto y(t)$ (avec $t \in I \subset \mathbb{R}$ et $y(t) \in \mathbb{R}^n$)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\bar{t} \in I$ et $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose que f est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument.

Soit $X, Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ deux solutions du système

$$X'(t) = f(t, X(t)),\ t \in I$$

On suppose $X(\bar{t}) = Y(\bar{t})$, alors:

$$\forall t \in I, \quad X(t) = Y(t)$$

Preuve : conséquence immédiate du théorème d'unicité

Trajectoire dans $\mathbb{R}^n$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et X une solution de $X'(t) = f(t, X(t)),\ t \in I$. On appelle $\gamma(X)$ la trajectoire de X dans l'espace $\mathbb{R}^n$ (ou encore "trajectoire dans $\mathbb{R}^n$") la courbe paramétrée $t \in I \mapsto X(t)$:

$$\gamma(X) = \{X(t),\ t \in I\}.$$

$\gamma(X)$ est donc une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^n$.

En mécanique, lorsque la trajectoire dans $\mathbb{R}^n$ de la solution X est fermée, l'ensemble $\gamma(X)$ est aussi appelé "orbite" de X

Trajectoires dans $\mathbb{R}^n$ pour les systèmes autonomes

Soient X et Y deux solutions de $X'(t) = f(X(t))$, $t \in \mathbb{R}$, f indépendante de t (le système est donc autonome) et f localement lipschitzienne. On suppose qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $X(t_1) = Y(t_2)$ alors

$$\{X(t),\ t \in \mathbb{R}\} = \{Y(t),\ t \in \mathbb{R}\},$$

c'est-à-dire $\gamma(X) = \gamma(Y)$.
Ce montre que deux trajectoires dans $\mathbb{R}^n$ ne peuvent pas se rencontrer : si deux trajectoires se rencontrent en un point alors les deux trajectoires sont confondues.
Si $t_1 = t_2$, on a $X = Y$, slide précédent

démonstration

$$X'(t) = f(X(t)),\ t \in \mathbb{R}, \qquad Y'(t) = f(Y(t)),\ t \in \mathbb{R}$$

$X(t_1) = Y(t_2)$. On définit u et v par

$$u(t) = X(t + t_1), v(t) = Y(t + t_2)$$

$u'(t) = X'(t + t_1) = f(X(t + t_1)) = f(u(t))$
$v'(t) = Y'(t + t_2) = f(Y(t + t_2)) = f(v(t))$
$u(0) = X(t_1) = Y(t_2) = v(0)$.
Les fonctions u et v sont donc solutions du système qui prennent la même valeur en 0
On en déduit $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $\gamma(u) = \gamma(v)$ et comme $\gamma(u) = \gamma(X)$ et $\gamma(v) = \gamma(Y)$ on a bien montré que $\gamma(X) = \gamma(Y)$

Trajectoires dans $\mathbb{R}^n$ pour les systèmes autonomes, suite

Soient X et Y deux solutions de $X'(t) = f(X(t))$, $t \in [t_0, +\infty[$, f indépendante de t (le système est donc autonome) et f localement lipschitzienne. On suppose qu'il existe $t_1, t_2 \geq t_0$ tels que $X(t_1) = Y(t_2)$ alors $\gamma(X) \subset \gamma(Y)$ ou $\gamma(Y) \subset \gamma(X)$

Preuve : En supposant $t_2 \geq t_1$, dans la démonstration précédente ($u(t) = X(t + t_1)$, $v(t) = Y(t + t_2)$) on obtient $u(t) = v(t)$ pour tout $t \geq t_0 - t_1$ (la fonction u n'est pas définie pour $t < t_0 - t_1$). La conclusion est donc que $X(t + t_1) = Y(t + t_2)$ pour tout $t \geq t_0 - t_1$, c'est-à-dire que $X(t) = Y(t + t_2 - t_1)$ pour tout $t \geq t_0$. En particulier ceci donne $\gamma(X) \subset \gamma(Y)$.

Application au modèle de Lotka-Volterra

$a, b, c, d > 0$, $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} > 0$

$$\begin{aligned}
&x_1'(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t),\ t > 0,\\
&x_2'(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t),\ t > 0,\\
&x_1(0) = x_1^{(0)},\ x_2(0) = x_2^{(0)}
\end{aligned}$$

La solution maximale vérifie $x_1(t) > 0$ et $x_2(t) > 0$ pour tout $0 \leq t < T_m$.

Périodicité d'une solution

Soient X une solutions de $X'(t) = f(X(t))$, $t \in \mathbb{R}$, f indépendante de t (le système est donc autonome) et f localement lipschitzienne. On suppose qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que $X(t_1) = X(t_2)$ et $t_1 \neq t_2$, alors X est périodique de période $t_2 - t_1$

Preuve : Dans la démontration précédente $(u(t) = X(t + t_1)$, $v(t) = X(t + t_2))$ on obtient $u(t) = v(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $X(t + t_1) = X(t + t_2)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $X(t) = X(t + t_2 - t_1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

point d'équilibre, solution stationnaire

Soit $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Un point d'équilibre du système $X'(t) = f(X(t)$ est un point a de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$.

la fonction constante égale à a est donc une solution du système

Exemple du modèle proie-prédateur $a, b, c, d > 0$

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) = x_1(t)(a - bx_2(t)),\ t > 0,\\
x_2'(t) &= -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t) = x_2(t)(-c + dx_1(t)),\ t > 0
\end{aligned}
$$

Deux points d'équilibre : $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c/d \\ a/b \end{bmatrix}$

Exemple du pendule non linéarisé

$$
\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_2(t),\ t > 0,\\
y_2'(t) &= -\sin(y_1(t)),\ t > 0
\end{aligned}
$$

Deux points d'équilibre intéressants : $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$

Stabilité des points d'équilibre (systèmes autonomes)

$f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$

On considère le problème de Cauchy :

$$X'(t) = f(X(t)), \quad 0 < t < +\infty \tag{1a}$$

$$X(0) = X_0 \tag{1b}$$

1. On dit que a est (uniformément) stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leqslant \delta \Rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (1) a une solution globale}, X \\ et \sup_{t \in [0,+\infty[} \|X(t) - a\| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

2. Le point a est instable si il n'est pas stable...
3. On dit que a est asymptotiquement stable si a est stable et si il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|X_0 - a\| \leqslant \delta \Rightarrow \begin{cases} \text{Le problème (1) a une solution globale}, X \\ et \lim_{t \to +\infty} \|X(t) - a\| = 0. \end{cases}$$

Stabilité de 0 pour les systèmes autonomes linéaires

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$X'(t) = AX(t),\ t > 0 \tag{2}$$

0 est point déquilibre Stable ?

1. Si $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, alors 0 est stable et même asymptotiquement stable.
2. Si il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors 0 est instable
3. On suppose que $\Re(\lambda) \leqslant 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$ et qu'il existe au moins un $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) = 0$.
   Alors 0 est stable et si et seulement si $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ pour tout λ tel que $\Re(\lambda) = 0$.
   Mais 0 n'est pas asymptotiquement stable

Preuve : Cours 10

Exemple, pendule linéairisé

$$y_1'(t) = y_2(t),\ t > 0,$$
$$y_2'(t) = -y_1(t),\ t > 0,$$

qui s'écrit $Y' = AY$ avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Le polynôme caractéristique associé à A est $P_A(X) = X^2 + 1$. Les valeurs propres sont donc $\lambda = \pm i$.
Selon le slide précédent, 0 est stable mais n'est pas asymptotiquement stable.

Développement au 1er odre de f

$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$
$f(X) = f(a) + A(X-a) + \|X-a\|\varepsilon(X)$, où $\lim_{X\to a} \varepsilon(X) = 0$ et
A est la matrice jacobienne de f au point a.
Cas $n = 1$, $A = f'(a)$
Cas $n = 2$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A = J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix}$
$f(a) = 0$, $X'(t) = f(X(t))$, $Y(t) = X(t) - a$,

$$Y'(t) = X'(t) = f(Y(t) + a) = AY(t) + g(Y(t)),$$

avec $g(Y(t)) = \|Y(t)\|\varepsilon(Y(t))$ où $\lim_{Y\to 0} \varepsilon(Y) = 0$.
Idée : étudier la stabilité de a pour le système $X'(t) = f(X(t))$ à partir de la stabilité de 0 pour le système linéaire $Y'(t) = AY(t)$

Stabilité pour les systèmes non linéaires autonomes

$$X'(t) = f(X(t)), \quad t > 0$$

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(a) = 0$. On note A la matrice jacobienne de f au point a

Le point a est-il stable ou instable ?

1. Si $\Re(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in Sp(A)$, alors a est asymptotiquement stable
2. Si il existe $\lambda \in Sp(A)$ tel que $\Re(\lambda) > 0$, alors a est instable

Preuve : cours 10

Exemple, modèle de Lotka-Volterra

$a, b, c, d > 0$

$$x_1'(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t),\ t > 0,$$
$$x_2'(t) = -cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t),\ t > 0$$

Point d'équilibre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$

Le point $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est instable

Point d'équilibre $\begin{bmatrix} c/d \\ a/b \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ ad/b & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $\pm i\sqrt{ac}$. L'analyse du système linéarisé ne permet pas de conclure. Une analyse plus poussée montre qu'il est stable (mais non asymptotiquement stable)

Le pendule pesant non linéarisé

$$y_1'(t) = y_2(t),\ t > 0,$$
$$y_2'(t) = -\sin(y_1(t)),\ t > 0$$

Points d'équilibre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $\pm i$. L'analyse du système linéarisé ne permet pas de conclure. Une analyse plus poussée montre qu'il est stable.

Point d'équilibre $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeurs propres de A sont ± 1. Le point $\begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ est instable