Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD1, équations linéaires

Exercice 1 (Croissance bactérienne)**.** Des scientifiques étudient l'évolution temporelle du nombre d'individus de quatre colonies bactériennes et font les constations suivantes :

— Colonie A : Tous les ans, le nombre de bactéries (population) présentes dans la colonie est multiplié par 10000.
— Colonie B : Tous les mois, la population est multipliée par 2 (resp. 3).
— Colonie C : Tous les jours, la population est multipliée par 1.5 (resp. 1.01).

1. Quelle colonie croît le plus vite ?
2. Pour une autre colonie D, la population $y(t)$ au cours du temps suit l'équation différentielle :

$$y'(t) = 0.01\, y(t)\, (resp.\, y'(t) = 0.02\, y(t))\, .$$

   La variable t a pour unité le jour. Résoudre cette équation.
3. Cette colonie D croit-elle plus ou moins vite que les précédentes ?

Exercice 2 (Loi de Malthus)**.** On considère une espèce dont la population (i.e. le nombre d'individus) a doublé en 100 ans et triplé en 200 ans. Montrer que cette population ne peut pas satisfaire la loi de Malthus (on rappelle que la loi de Malthus s'écrit $p'(t) = ap(t)$ avec $a > 0$ indépendant de t).

Exercice 3 (Datation au carbone 14)**.** Le carbone contenu dans la matière vivante est essentiellement l'isotope stable C^{12} (6 neutrons et 6 protons) mais contient aussi une infime proportion d'isotope radioactif C^{14} (6 protons et 8 neutrons). Ce carbone radioactif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échange complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de C^{14} dans son carbone total.
Après la mort, les échanges cessent et la quantité de carbone radioactif contenu dans les os diminue : elle perd $1/8000$ de sa masse chaque année. La proportion de C^{14} dans le carbone total perd donc elle aussi $1/8000$ de sa valeur chaque année. Cela permet de déterminer la date de la mort d'un être vivant à partir de ses ossements.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la proportion de carbone 14 dans un os "mort".
2. Dessiner l'allure générale des solutions pour différentes conditions initiales.

Applications :
— *Datation de l'homme de Néanderthal.* Des fragments de squelette humain de type Néanderthal sont retrouvés dans une caverne en Palestine. L'analyse montre que la proportion de C^{14} n'est que de $6,24\%$ de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Quand cet individu a-t-il vécu ?
— *Datation de l'homme de Cro-Magnon.* En construisant une voie ferrée à Cro-Magnon en 1868, on découvrit des restes humains dans une caverne. Philip van Doren Stern, dans son livre *Prehistoric Europe* estime que cet homme vivait entre 30.000 et 20.000 ans avant J.C.. Dans quelle fourchette se situe le rapport entre la teneur de C^{14} présent dans ce squelette et celle des os d'un être vivant ?

Exercice 4 (Transfert thermique)**.** D'après une loi dûe à Newton, le taux de refroidissement d'un corps plongé dans de l'air plus froid est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'air.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par la température.
2. Si, dans de l'air à $\theta_a = 20°$, ce corps met 20 minutes pour passer de $\theta_0 = 100°$ à $\theta_1 = 60°$, combien de temps met-il pour atteindre $\theta_2 = 30°$?
3. On suppose maintenant que la température de l'air varie de façon régulière : $\theta_a(t) = 10 + 10\cos(2\pi t/24)$, et que le corps et l'air ont initialement la même température. Quelle est la solution de l'équation

$$\theta'(t) = -\lambda\big(\theta(t) - \theta_{air}(t)\big)?$$

Exercice 5 (Deux équations linéaires du 1er ordre, partie du partiel 2019-20)**.**
Cet exemple est issu d'un modèle d'absoption de médicament, en pharmacologie. Soient $a > 0$ et $y_0 > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$y'(t) = -ay(t),\ t > 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

1. Donner la solution du problème (1)-(2) (c'est-à-dire la fonction $y \in C([0,+\infty[,\mathbb{R}) \cap C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ solution de (1)-(2)).

Soit $b > 0$. On s'intéresse maintenant au problème de Cauchy suivant, avec y donnée à la question 1 :

$$z'(t) = -bz(t) + ay(t),\ t > 0, \tag{3}$$
$$z(0) = 0. \tag{4}$$

2. On suppose, dans cette question, que $a \neq b$.
   (a) Donner la solution de (3)-(4).
   (b) Donner les valeurs de $\lim_{t\to+\infty} z(t)$ et $\int_0^{+\infty} z(t)dt$.
3. On suppose, dans cette question, que $a = b$.
   (a) Donner la solution de (3)-(4).
   (b) Donner les valeurs de $\lim_{t\to+\infty} z(t)$ et $\int_0^{+\infty} z(t)dt$.

Exercice 6 (Solution bornée)**.** Trouver l'unique solution de l'équation différentielle

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - y(t) = \cos t - \sin t,$$

qui satisfait à la condition d'être bornée lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 7 (Un problème de ventilation)**.**
Le volume V d'une salle de travaux dirigés est de $200\,m^3$. On suppose qu'à l'instant $t_0 = 0$, l'air de cette salle contient $C_0 = 0,15\,\%$ de gaz carbonique (CO_2) et l'air du dehors en contient $0,04\,\%$. On suppose que le ventilateur peut renouveler $P = 20\,m^3$ par minute. Au bout de combien de temps, le taux du gaz carbonique de la salle est-il réduit de moitié ? On pourra montrer que la concentration en gaz carbonique dans la salle vérifie une équation de la forme :

$$C'(t) = -\alpha(C(t) - C_{ext}),\ C(0) = C_0\,.$$

Exercice 8 (Calcul de solutions d'une EDO et du problème de Cauchy associé)**.**
Donner la solution générale de l'équation $y'(t) + 2ty(t) = 0$.
Donner la solution générale de l'équation $y'(t) + 2ty(t) = t$.
Donner la solution de l'équation $y'(t) + 2ty(t) = t$ pour tout $t > 1$, avec la condition initiale $y(1) = 2$.

Exercice 9.
Donner la solution du problème

$$(1+t^2)y'(t) + 4ty(t) = t \text{ pour tout } t > 1,$$
$$y(1) = \frac{1}{4}.$$