Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD2, équations non linéaires

Exercice 1 (Modèle de population : modèle logistique, étude qualitative)**.** Le modèle de Malthus prévoit une croissance infinie et ne tient pas compte de l'épuisement possible des ressources. Pour ce faire, on utilise depuis Verhulst, le modèle de croissance logistique : on se donne des paramètres $a, b > 0$, une donnée initiale $y_0 \geq 0$, et on considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} &y' = ay - by^2 = ay\left(1 - \tfrac{b}{a}y\right), t > 0. \\ &y(0) = y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

I. Etude qualitative

1. Montrer que ce problème admet une unique solution locale.
2. Calculer les solutions stationnaires.
3. On suppose que y est une solution globale qui admet une limite ℓ en $+\infty$. Montrer que ℓ est une solution stationnaire.
4. On suppose que $0 < y_0 < \dfrac{a}{b}$.
   (a) Montrer que $0 < y(t) < \dfrac{a}{b}$ pour tout $t > 0$.
   (b) En déduire que y est une solution globale
   (c) Montrer que y est une fonction croissante du temps.
   (d) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ existe et donner sa valeur.
5. On suppose que $y_0 > \dfrac{a}{b}$.
   (a) Montrer que $y(t) > \dfrac{a}{b}$ pour tout $t > 0$.
   (b) Montrer que y est une fonction décroissante du temps.
   (c) En déduire que y est une solution globale
   (d) Montrer que $\lim_{t \to +\infty} y(t)$ existe et donner sa valeur.
6. Etudier la stabilité des solutions stationnaires.

II. Etude quantitative On va résoudre l'équation (1) de deux façons différentes : par la méthode des variables séparables, et par la méthode de Bernouilli.

7. Décomposer la fraction $\frac{1}{ay - by^2}$ en éléments simples. En déduire une primitive de $\frac{y'(t)}{ay(t) - by(t)^2}$. Intégrer par rapport au temps l'équation
$$\frac{y'(t)}{ay(t) - by(t)^2} = 1$$
et en déduire la forme générale des solutions de (1).
8. Deuxième méthode : l'équation logistique (1) fait partie de la famille des équations de Bernouilli, qui sont de la forme
$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y(t)^\alpha$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$ et a et b sont deux fonctions données. Un moyen de résoudre cette équation est de poser $z = y^{-\alpha+1}$ et de résoudre l'équation différentielle linéaire satisfaite par z. On en déduit alors l'expression $y = z^{\alpha-1}$. Utiliser cette méthode dans le cas particulier de l'équation logistique (1).

Exercice 2 (Modèle de population : modèle de Gompertz)**.** Un autre modèle utilisé est aussi celui de Gompertz : $a, K > 0$

$$y'(t) = ay(t)\ln\left(\frac{K}{y(t)}\right). \tag{2}$$

1. Montrer que l'équation (2) s'écrit $y' = f(y)$ où f est une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f ne peut pas être prolongée en une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1.
3. Soit $0 < \varepsilon < K$. Montrer qu'il existe une fonction g_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telle $g_\varepsilon = f$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
4. Trouver les points d'équilibre de f dans $[0, +\infty[$ (c'est-à-dire les points $\bar{y}$ de $[0, +\infty[$ tels que $f(\bar{y}) = 0$).
5. Montrer que si la donnée initiale appartient à l'intervalle $]0, K[$, alors la solution de (2) reste dans cet intervalle.
6. Montrer que les solutions maximales associées sont globales.
7. Résoudre cette équation en utilisant la fonction $z = \ln y$ et l'équation vérifiée par z.
8. Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln(\ln x)$? Utiliser ceci pour résoudre l'équation une seconde fois, par la méthode des variables séparables.

Exercice 3 (Un modèle d'évaporation)**.** Une goutte de pluie sphérique s'évapore avec un débit proportionnel à sa surface. Écrire une formule donnant son volume V en fonction du temps.

Exercice 4 (Encore un modèle de population)**.** Une population de punaises vivant sur une surface plane se rassemble en une colonie de la forme d'un disque. Le taux d'accroissement naturel des punaises est r_1. Les punaises situées à la périphérie souffrent du froid et ont un taux de mortalité supplémentaire. Or, si $N(t)$ est le nombre total de punaises à l'instant t, le nombre de celles de la périphérie est proportionnel à $\sqrt{N(t)}$. On modélise donc la dynamique de la population par l'équation $N'(t) = r_1 N(t) - r_2\sqrt{N(t)}$, avec $r_1, r_2 > 0$,

1. Quels sont les points d'équilibre (ou solutions stationnaires) ? Peut-on conclure à l'existence locale et l'unicité de la solution par le théorème de Cauchy-Lipschitz ?
2. Résoudre l'équation avec la méthode de Bernouilli et dessiner quelques solutions de cette équation.
3. La population tend-elle vers un équilibre lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 5 (Une équation de Bernouilli)**.** On considère l'EDO suivante, pour $t > 0$,

$$y'(t) = y(t)\big(1 - y^2(t)\big).$$

1. Quels sont les points d'équilibre de cette EDO. Déterminer le signe de $y(1 - y^2)$ entre ces points d'équilibre. Quelles sont les valeurs de la donnée initiale $y_0 = y(0)$ pour lesquelles les solutions de l'EDO vont se rapprocher (respectivement s'éloigner) de ces points d'équilibre ?
2. Représenter sur un même graphique quelques trajectoires en fonction du temps. On représentera en particulier les points d'équilibre, et des solutions entre ces points.
3. On peut résoudre cette équation en utilisant la méthode de Bernouilli détaillée dans l'exercice 1. Pour une solution $y(t)$ de cette EDO, on pose $z(t) = y(t)^{-2}$. Montrer que z est solution de l'EDO linéaire

   $$z'(t) = -2z(t) + 2.$$

   En déduire la forme générale des solutions y de l'EDO initiale :

   $$y(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}, \quad C \in]-1, +\infty[.$$

4. Exprimez C en fonction de $y(0)$.
5. Dans les cas où $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$, trouver un équivalent simple de $y(t) - 1$ en $+\infty$. Est-ce que ces solutions atteignent en temps fini le point d'équilibre ?
6. Reprendre votre représentation graphique des solutions en fonction du temps, au vu de ces nouvelles informations.