

C12, Comportement des solutions pour $n = 2$

On suppose que $n = 2$ et que f est fonction localement lipschitzienne de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 . On s'intéresse problème de Cauchy :

$$\begin{aligned}X'(t) &= f(X(t)), \quad t > 0, \\X(0) &= X^{(0)}\end{aligned}$$

On note γ la trajectoire (dans \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire dans le plan de phase) de la solution maximale, qui est définie par:

$$\gamma(X) = \{X(t), t \in [0, T_m]\}$$

où T_m est le temps d'existence de X

L'objet de ce cours est d'étudier l'allure de γ

Comportement des solutions pour le cas linéaire autonome

Dans le cas linéaire, le problème s'écrit

$$\begin{aligned}X'(t) &= AX(t), \quad t > 0, \\X(0) &= X^{(0)}\end{aligned}$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Nous allons décomposer cette étude en 3 parties :

1. A diagonalisable dans \mathbb{R}
2. A non diagonalisable
3. A diagonalisable dans \mathbb{C}

A diagonalisable dans \mathbb{R}

$X'(t) = AX(t)$, $t > 0$ La solution est ici de la forme

$$C_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i, \quad \varphi_i \neq 0, \quad i \in \{1, 2\},$$

Nous donnons maintenant l'allure des solutions selon les positions de λ_1 et λ_2 par rapport à 0

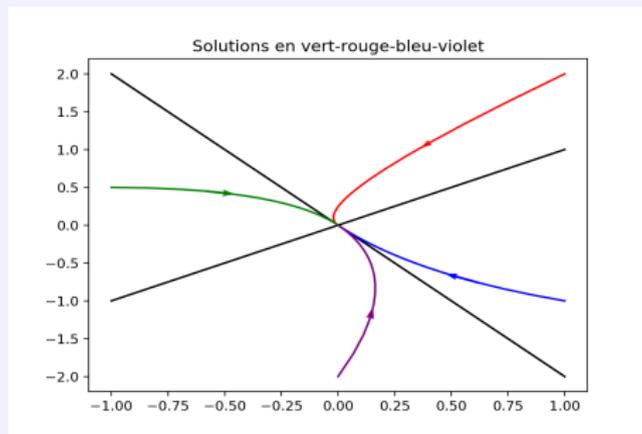
Nous donnons aussi quelques exemples avec $\varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

A diagonalisable dans \mathbb{R} avec $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

La solution tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$

Le terme $e^{\lambda_1 t}$ tend vers 0 plus vite que $e^{\lambda_2 t}$, la trajectoire tend à être parallèle à la droite engendrée par φ_2 (si $C_2 \neq 0$).



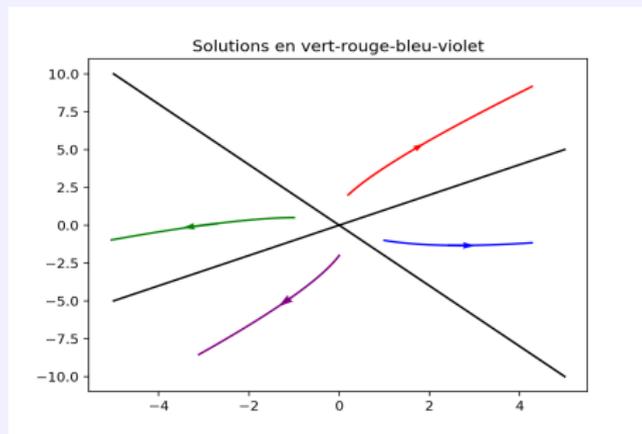
$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A diagonalisable dans \mathbb{R} avec $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Les solutions sont non bornées (quand $t \rightarrow +\infty$)

Le terme $e^{\lambda_1 t}$ tend vers $+\infty$ plus vite que $e^{\lambda_2 t}$, la trajectoire tend à être parallèle à la droite engendrée par φ_1 (si $C_1 \neq 0$).

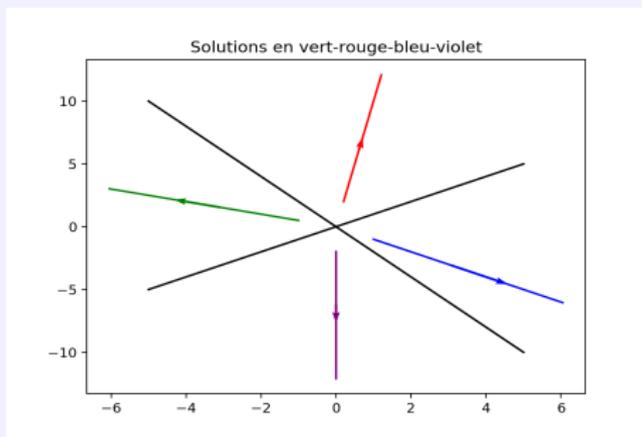


$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A est diagonalisable dans \mathbb{R} avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} \varphi_1 + C_2 e^{\lambda t} \varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Les trajectoires partent à l'infini

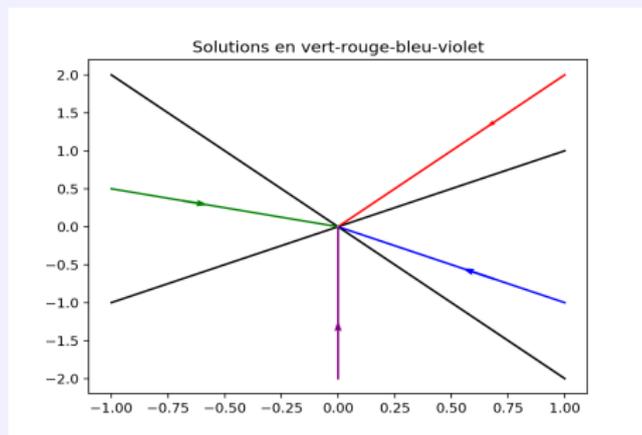


$$\lambda = 1, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A est diagonalisable dans \mathbb{R} avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} \varphi_1 + C_2 e^{\lambda t} \varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Les trajectoires tendent vers 0



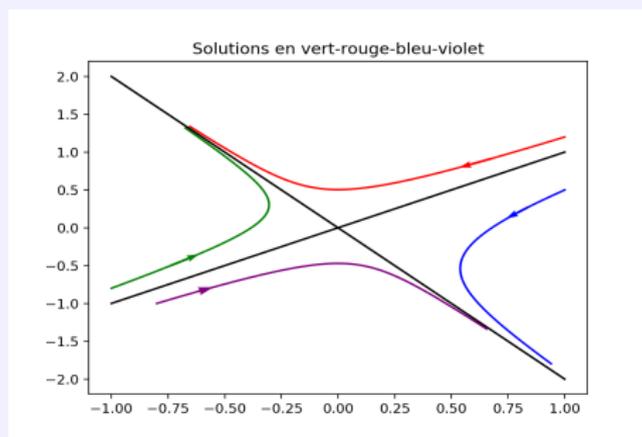
$$\lambda = -1, \quad \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A diagonalisable dans \mathbb{R} avec $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \varphi_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Les trajectoires partent à l'infini si $C_2 \neq 0$

Les trajectoires tendent (quand $t \rightarrow +\infty$) à être parallèles à la droite engendrée par φ_2 .



$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

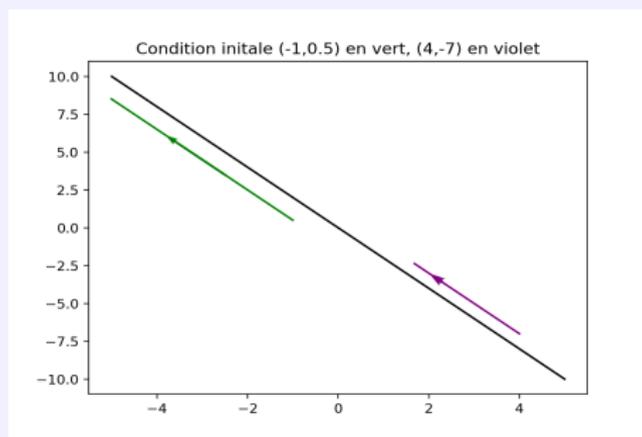
A diagonalisable dans \mathbb{R} avec $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2 = \lambda$

$$X(t) = C_1\varphi_1 + C_2e^{\lambda t}\varphi_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Pour $\lambda > 0$, Les trajectoires partent à l'infini si $C_2 \neq 0$

Pour $\lambda < 0$, Les trajectoires tendent vers une constante

Les trajectoires sont parallèles à la droite engendrée par φ_2 .



$$\lambda_1 = 0, \lambda = +1 \text{ (vert) et } -1 \text{ (violet), } \varphi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \varphi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A non diagonalisable

$$X'(t) = AX(t), \quad t > 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$$

La solution générale est (C_1, C_2 arbitraires dans \mathbb{R}) :

$$C_1 e^{\lambda t} \varphi + C_2 e^{\lambda t} (\psi + t\varphi),$$

avec $A\varphi = \lambda\varphi$ et $A\psi - \lambda\psi = \varphi, \varphi \neq 0$

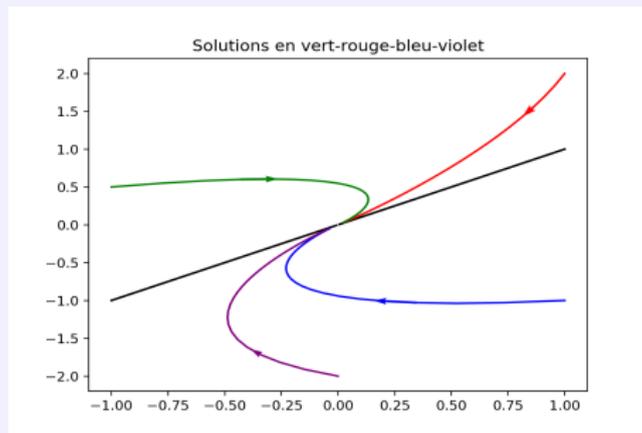
Nous distinguons encore 3 cas selon la position de λ par rapport à 0

Dans les graphes de ce cas (A non diagonalisable), $\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A non diagonalisable, $\lambda < 0$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} \varphi + C_2 e^{\lambda t} (\psi + t\varphi)$$

Dans ce cas, les solutions tendent vers 0 et les trajectoires tendent (quand $t \rightarrow +\infty$) à être parallèles à la droite engendrée par φ

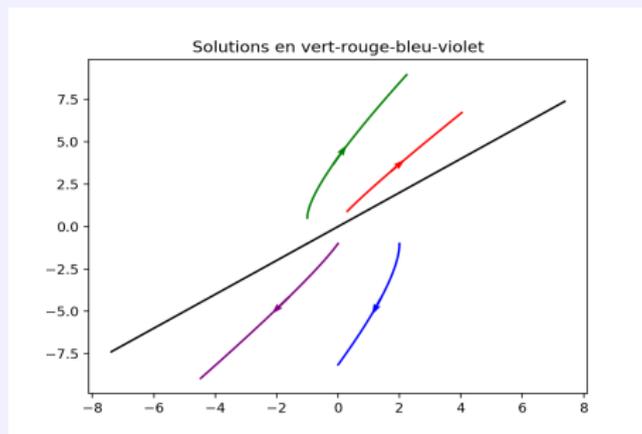


$$\lambda = -1, \varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A non diagonalisable, $\lambda > 0$

$$X(t) = C_1 e^{\lambda t} \varphi + C_2 e^{\lambda t} (\psi + t\varphi)$$

Les solutions sont non bornées et tendent, quand $t \rightarrow +\infty$, à être parallèles à la droite engendrée par φ



$$\lambda = 1, \varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 0$. La solution générale est alors $C_1 \varphi + C_2 (\psi + t\varphi)$. La trajectoire est une demi-droite parallèle à φ

A diagonalisable dans \mathbb{C}

$$X'(t) = AX(t), \quad t > 0$$

Valeurs propres de A : λ et $\bar{\lambda}$ avec $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$

Soit φ tel que $A\varphi = \lambda\varphi$ avec $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^2$ non nuls.
La solution générale du système $X'(t) = AX(t)$ est alors, avec C_1, C_2 arbitraires dans \mathbb{R} :

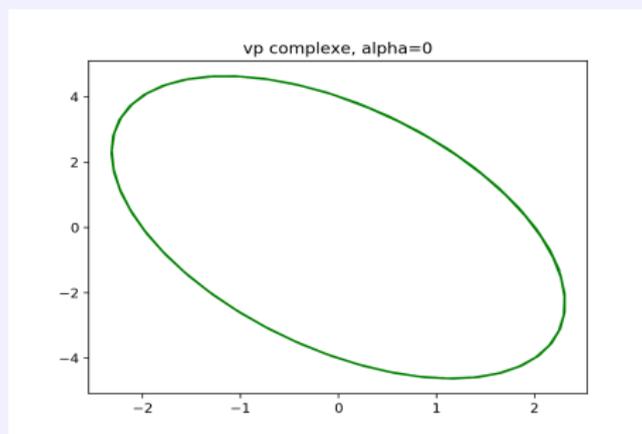
$$C_1 e^{\alpha t} (\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2) + C_2 e^{\alpha t} (\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2).$$

Ici encore, nous distinguons encore 3 cas selon la position de α par rapport à 0

A diagonalisable dans \mathbb{C} avec $\alpha = 0$

$$X(t) = C_1(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2) + C_2(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2)$$

La trajectoire (dans le plan de phase) est une ellipse



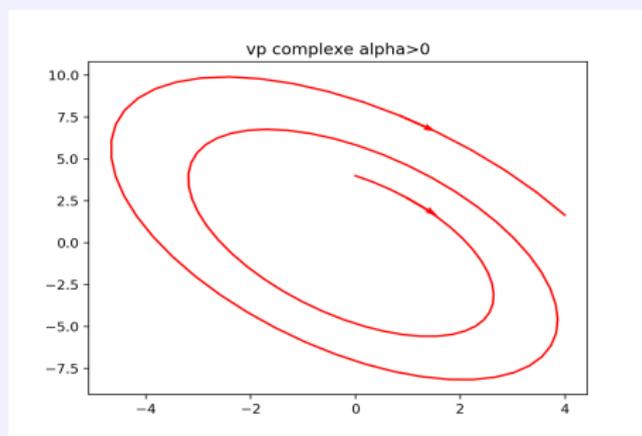
$$\lambda = i\beta, \beta \neq 0$$

A diagonalisable dans \mathbb{C} avec $\alpha > 0$

$$X(t) = e^{\alpha t} (C_1(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2) + C_2(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2))$$

La trajectoire a ici la forme d'une spirale

La norme de la solution tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$.



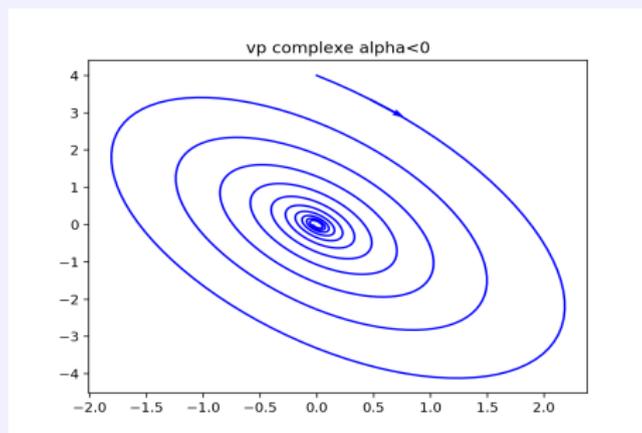
$$\alpha = 1$$

A diagonalisable dans \mathbb{C} avec $\alpha < 0$

$$X(t) = e^{\alpha t} (C_1(\cos(\beta t)\varphi_1 - \sin(\beta t)\varphi_2) + C_2(\sin(\beta t)\varphi_1 + \cos(\beta t)\varphi_2))$$

La trajectoire a ici la forme d'une spirale

La solution tend vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.



$$\alpha = -1$$

Remarque sur la discrétisation, A diag. dans \mathbb{C} , $\alpha = 0$

$$X'(t) = AX(t). \quad \lambda = i\beta \neq 0, \quad A\varphi = i\beta\varphi, \quad \varphi \neq 0, \quad \varphi \in \mathbb{C}^2$$

La trajectoire est une ellipse, $\|X(t)\| \not\rightarrow 0, +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$

$$\text{Discrétisation par EE (pas de temps } h) : \frac{X_{n+1} - X_n}{h} = AX_n,$$

$$X_{n+1} = (I + hA)X_n, \quad X_n = (I + hA)^n X_0$$

$$X_0 = \varphi, \quad X_n = (1 + ih\beta)^n \varphi$$

$$\|X_n\| = |1 + ih\beta|^n \|\varphi\| = (\sqrt{1 + h^2\beta^2})^n \|\varphi\|$$

et donc $\|X_n\| \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$, comme dans le cas $\alpha > 0$

$$\text{Discrétisation par EI (pas de temps } h) : \frac{X_{n+1} - X_n}{h} = AX_{n+1},$$

$$X_{n+1} = (I - hA)^{-1} X_n$$

$$X_0 = \varphi, \quad X_n = \left(\frac{1}{1 - ih\beta}\right)^n \varphi$$

$$\|X_n\| = \left|\frac{1}{1 - ih\beta}\right|^n \|\varphi\| = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + h^2\beta^2}}\right)^n \|\varphi\|$$

et donc $\|X_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, comme dans le cas $\alpha < 0$

Exemple explicite (Coriolis), tp4 et td10

Résumé du comportement pour un système linéaire

$$X'(t) = AX(t), \quad t > 0$$

Seules 3 situations sont possibles pour la solution, notée X :

1. $\|X(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$,
2. $\|X(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$,
3. X est périodique (ce cas contenant le cas d'une solution stationnaire)

Nous allons voir maintenant que d'autres cas sont possibles si le système est non linéaire

Comp. des solutions, cas non linéaire autonome, $n = 2$

$X'(t) = f(X(t))$, $t > 0$, $X(0) = X^{(0)}$, f localement lipschitzienne

La trajectoire dans \mathbb{R}^2 est notée $\gamma(X) = \{X(t), t > 0\}$

On suppose la solution est globale ($T_m = +\infty$)

Si il existe $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = a$, alors a est un point d'équilibre, autrement dit $f(a) = 0$

f_1 et f_2 les deux composantes de f , x_1 et x_2 les deux composantes de X et a_1 et a_2 les deux composantes de a .

$$x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t))$$

$$x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)),$$

Le théorème des accroissements finis donne qu'il existe $\theta_{1,t}$, $\theta_{2,t} \in]t, t + 1[$

$$x_1(t+1) - x_1(t) = x_1'(\theta_{1,t}) = f_1(X(\theta_{1,t})),$$

$$x_2(t+1) - x_2(t) = x_2'(\theta_{2,t}) = f_2(X(\theta_{2,t}))$$

$t \rightarrow +\infty$ donne $f(a) = 0$

La solution X est bornée sans point d'équilibre

$X'(t) = f(X(t))$, $t > 0$, $X(0) = X^{(0)}$, f localement lipschitzienne

Si f est linéaire, X borné implique X périodique ou $\rightarrow 0$

Question : autre possibilité si f non linéaire ?

X est non convergente et la trajectoire ne peut pas se recouper (système autonome).

La trajectoire va décrire une sorte de spirale sans converger vers un point (car il n'y a pas de point d'équilibre) et sans aller vers l'infini (car la solution est bornée).

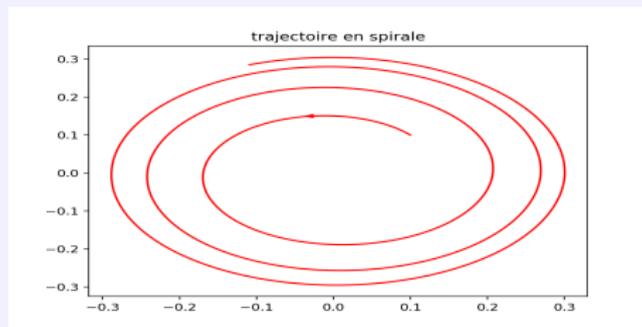


Figure: Trajectoire en spirale

Théorème de Poincaré-Bendixson, $n = 2$

$X'(t) = f(X(t))$, $t > 0$, $X(0) = X^{(0)}$, f localement lipschitzienne
Soit X solution (maximale) et soit D un ensemble fermé borné de \mathbb{R}^2
On suppose que:

1. $\{X(t), 0 \leq t < T_m\} \subset D$
2. D ne contient aucun point d'équilibre

Alors,

1. $T_m = +\infty$
2. Il existe \tilde{X} solution périodique non constante, c'est-à-dire $\tilde{X}'(t) = f(\tilde{X}(t))$ pour tout t et il existe $T > 0$ t.q. $\tilde{X}(t+T) = \tilde{X}(t)$ pour tout $t > 0$
3. $d(X(t), \gamma(\tilde{X})) = \inf\{|X(t) - y|, y \in \gamma(\tilde{X})\} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$

Poincaré-Bendixson, Exemple

La trajectoire de la solution (en rouge) converge vers la trajectoire d'une solution périodique (en bleu).

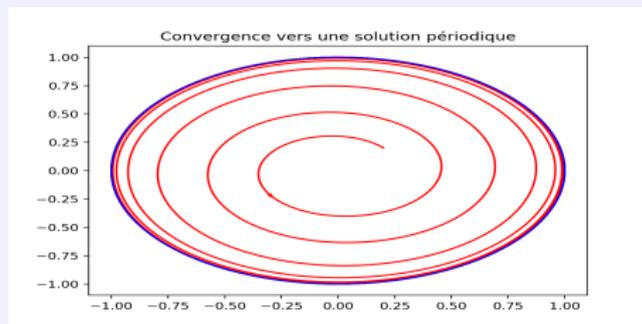


Figure: Trajectoire en spirale convergeant vers une solution périodique

Précision sur Poincaré-Bendixson (1881-1901)

On définit l'ensemble " ω -limite" de X , noté $\omega(X)$, par :

$y \in \omega(X)$ si il existe $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} X(t_n) = y$

On montre qu'il existe \tilde{X} solution périodique non constante telle que $\omega(X) = \gamma(\tilde{X})$.

Exemple du pendule, $g > 0$, $l > 0$

$$x''(t) + \frac{g}{l} \sin(x(t)) = 0, t > 0$$

On pose $x_1 = x$ et $x_2 = x'$. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

$$X'(t) = f(X(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -(g/l) \sin(x_1(t)) \end{bmatrix}.$$

On sait que 0 est un point d'équilibre de ce système.

0 est stable ?

Par le problème linéarisé. $J_f(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}$. Les v.p. de $J_f(0)$

sont $\lambda = \pm i\sqrt{g/l}$. On ne peut pas conclure

Par la conservation de l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}(x'(t))^2 - \frac{g}{l} \cos(x(t))$

On montre $E'(t) = 0$ et donc $E(t) = E(0)$ pour tout $t > 0$

Ceci permet de montrer que 0 est stable et qu'il y a des solutions périodiques. Exemple : $x_2(0) = 0$ et $|x_1(0)| < \pi/2$

Equation du pendule, $g = l = 1$, schémas numériques

$x_1(0) = x(0) = \pi/4$, $x_2(0) = x'(0) = 0$. h est le pas de temps.

1. Avec le schéma d'Euler explicite, pour $h = 0.1$, la solution semble "exploser" pour $T = 50$. Mais la solution approchée converge néanmoins vers la solution exacte quand $h \rightarrow 0$.
2. Avec le schéma d'Euler implicite. Pour $h = 0.1$, la solution semble tendre vers 0 pour $T = 50$. Ici aussi la solution approchée converge vers la solution exacte quand $h \rightarrow 0$.
(Remarque : la méthode de résolution, à chaque pas de temps, par l'algorithme de Newton fonctionne très bien)
3. Avec le schéma Heun, La solution approchée est très nettement meilleure que pour les schémas d'Euler. La solution approchée est déjà très proche de la solution exacte pour $h = 0.1$.

Système proie-prédateur, tp4

$a, b, c, d > 0, x_0, y_0 > 0$

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \quad t > 0,$$

$$y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \quad t > 0,$$

$x(0) = x_0, y(0) = y_0$. On peut montrer que les solutions sont périodiques (examen de janvier 2020)

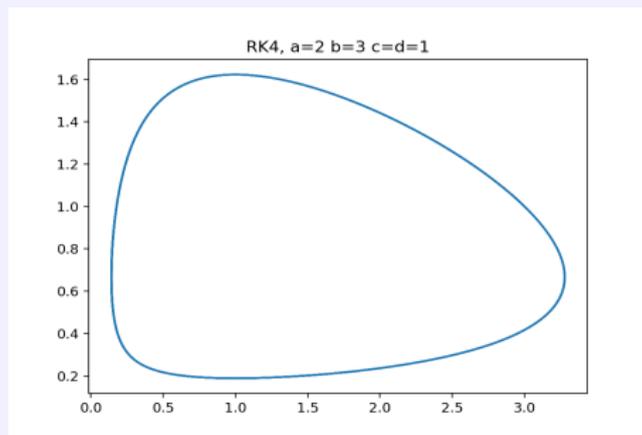


Figure: $x_0 = 3, y_0 = 1$

Effet tunnel, td8, application de Poincaré-Bendixson

$$x_1'(t) = x_2(t) + x_1(t) - x_1^3(t), t > 0$$

$$x_2'(t) = -x_1(t), t > 0$$

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } f(X(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) + x_1(t) - x_1^3(t) \\ -x_1(t) \end{bmatrix}. \text{ de sorte}$$

que le système s'écrit $X'(t) = f(X(t))$

Le seul point d'équilibre est 0 (c'est-à-dire $x_1 = x_2 = 0$)

$$J_f(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Les v.p. de } J_f(0) \text{ sont } \lambda = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Le point d'équilibre 0 est donc instable.

Soit X la solution avec condition initiale $X^{(0)} \neq 0$

On peut montrer que la solution est globale et qu'il existe

$0 < \varepsilon < A$ t.q. $\varepsilon \leq \|X(t)\| \leq A$ pour tout $t > 0$

En prenant $D = \{y \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \leq \|y\| \leq A\}$, le théorème de Poincaré-Bendixson donne que $X(t)$ "converge" (quand $t \rightarrow +\infty$) vers la trajectoire d'une solution périodique. Ceci prouve, en particulier, l'existence d'une solution périodique

Effet tunnel, exemple de solution

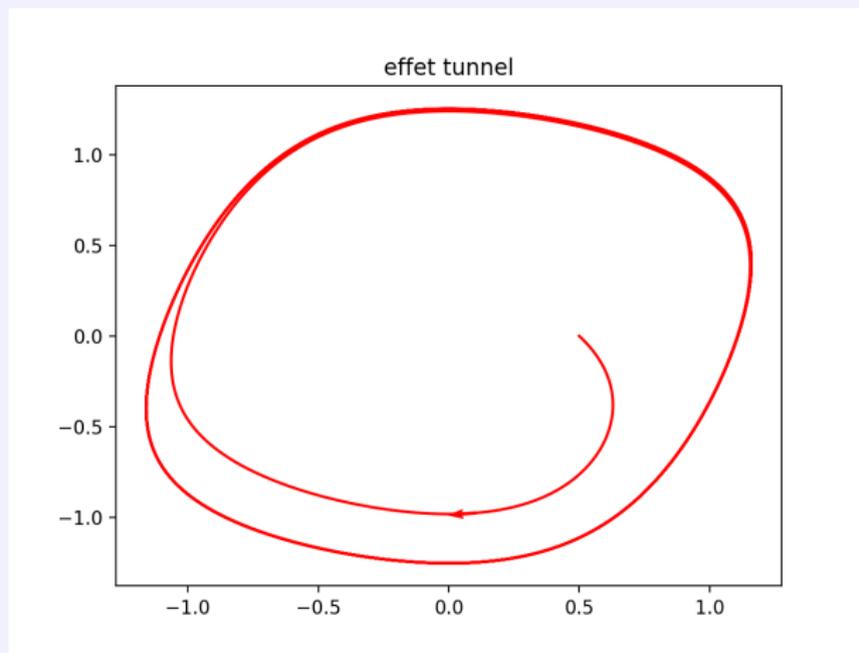


Figure: Effet tunnel, solution avec $x_1(0) = 0.5$, $x_2(0) = 0$

Système "simple"

$$x_1'(t) = -x_2(t) + x_1(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2), \quad t > 0$$

$$x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t)(1 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2), \quad t > 0$$

En multipliant la 1ere équation par x_1 et la seconde par x_2

$$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)' = (x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

et donc $z' = 2z(1 - z)$ avec $z = r^2 = x_1^2 + x_2^2$, $r \geq 0$

En notant $r_0 (\neq 1)$ la valeur de r pour $t = 0$ la solution est

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + e^{-2t}(1 - r_0^2)}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$$

Pour ce système, le seul point d'équilibre est 0, il est instable.

Ici aussi le théorème de Poincaré-Bendixson s'applique dès que la condition initiale est non nulle

La solution $X(t)$ "converge" (quand $t \rightarrow +\infty$) vers la trajectoire d'une solution périodique.

La trajectoire de cette solution périodique est le cercle de rayon 1.

Système "simple", exemple de solution

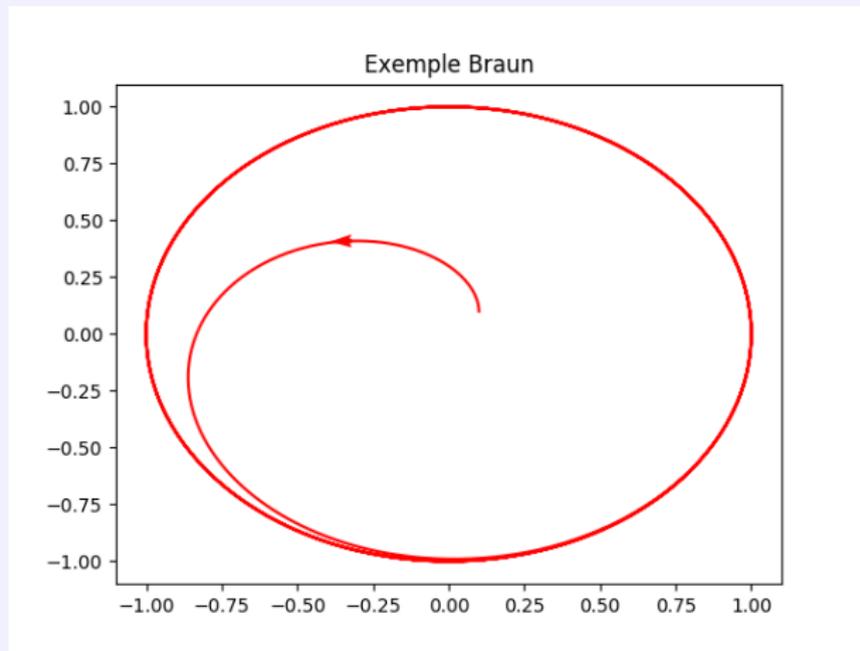


Figure: Trajectoire avec la condition initiale $x_1(0) = x_2(0) = 0.1$

Compléments