**Université de Marseille**
**Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires**
**TD 10, Schémas numériques**

**Exercice 1.**
On s'intéresse à la résolution de numérique de l'équation du pendule sans frottement, dans l'approximation des petits angles :

$$\theta''(t) + \omega^2\theta(t) = 0, \text{ pour tout } t > 0,$$

où $\omega = \sqrt{g/l}$ est une constante positive donnée.

1. Montrer que les solutions (globales) de ce système préservent l'énergie totale $E$ définie par

$$E(\theta, \theta') = \omega^2 \frac{\theta^2}{2} + \frac{(\theta')^2}{2},$$

c'est-à-dire que $E\big(\theta(t), \theta'(t)\big) = E\big(\theta(0), \theta'(0)\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'EDO ci-dessus peut-être réécrite sous la forme d'un système d'ordre un sur le couple $Y = (\theta, \theta')^t$:

$$Y' = AY.$$

2. Préciser la matrice $A$. La diagonaliser et dessiner des trajectoires dans l'espace des phases.

3. On choisit un pas de temps $dt$, et on cherche une solution approchée du système ci-dessus avec le schéma d'Euler explicite. On construit donc la suite, pour tout $n \geq 0$,

$$Y_{n+1} = Y_n + dt\, AY_n.$$

On note l'énergie $E(Y) = \omega^2 \frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}$ (où $y_1$ et $y_2$ sont les composantes de $Y$). Montrer que

$$E(Y_{n+1}) = \big(1 + (\omega dt)^2\big)E(Y_n).$$

4. On utilise maintenant le schéma d'Euler implicite, $Y_{n+1} = Y_n + dt\, AY_{n+1}$.
Montrer que

$$E(Y_{n+1}) = \frac{E(Y_n)}{1 + (\omega dt)^2}.$$

5. On utilise maintenant le schéma de Crank-Nicolson $Y_{n+1} = Y_n + \frac{dt}{2}\big(AY_n + AY_{n+1}\big)$.
Montrer que cette fois-ci le schéma conserve l'énergie $E(Y_{n+1}) = E(Y_n)$.

**Exercice 2** (convergence uniforme en temps du schéma d'Euler Implicite)**.**
Soient $d \geq 1$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $f$ vérifie $f(x) \cdot x \leq -\|x\|^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, où $x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel de $x$ avec $y$ et $\|x\|$ la norme euclidienne de $x$. On considère le problème suivant:

$$u'(t) = f(u(t)),\ t > 0, \qquad u(0) = u_0.$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution maximale définie sur $[0, T_m[$. Dans la suite, on note $u$ cette solution maximale.

2. Calculer la dérivée de $t \mapsto \|u(t)\|^2$. En déduire que $T_m = +\infty$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$.

3. Montrer que $f(0) = 0$. On note $A$ la matrice jacobienne de $f$ en $0$. Montrer que $A$ vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d,\ Ax \cdot x \leq -\|x\|^2.$$

   En déduire que $A$ est inversible.

On considère maintenant le schéma d'Euler implicite avec pas de temps uniforme $dt$:

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{dt} = f(u_{n+1}). \tag{1}$$

4. Pour $\eta > 0$, on note $B(0,\eta) = \{z \in \mathbb{R}^d,\ \|z\| < \eta\}$. Montrer grâce au théorème des fonctions implicites qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $y \in B(0,\varepsilon)$ il existe un et un seul $x \in B(0,\delta)$ solution de l'équation

$$\frac{x - y}{dt} = f(x).$$

   En utilisant $x \cdot (x - dt\, f(x)) = x \cdot y$, Montrer que

$$\|x\| \leq \frac{\|y\|}{1 + dt}.$$

   On note dans la suite $\varphi(y)$ cette valeur de $x$.

5. Montrer que si $y \in B(0,\varepsilon)$ ($\varepsilon$ donné à la question 4), On obtient une solution au schéma d'Euler implicite (schéma (1)) en prenant pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ (la fonction $\varphi$ étant celle de la question 4) et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

6. (Convergence uniforme) On pose $\overline{u}_n = u(ndt)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $r > 0$, ne dépendant que de $f$, t.q. si $\|u_0\| \leq r$, alors on a $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\|\overline{u}_n - u_n\|) \to 0$, quand $dt \to 0$.