Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 3, équations non linéaires, unicité, solutions globales

Exercice 1. On s'intéresse pour $t > 0$ aux équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x'(t) = \sin(tx(t)) & \text{b) } y'(t) = \mathrm{sh}(y(t)) \\ \text{c) } z'(t) = z^3(t) & \text{d) } u'(t) = -u^3(t) \\ \text{e) } v'(t) = \dfrac{1}{1+v(t)} & \text{f) } w'(t) = |w|^{3/4}(t) \end{array}$$

Pour chacune de ces équations, a-t-on, selon la valeur de la condition initiale en $t = 0$, existence locale ou globale d'une solution ? A-t-on unicité ?

Exercice 2 (Le seau qui se vide)**.** On considère un seau de rayon A, percé en son fond d'un trou de rayon a. Il est rempli d'eau jusqu'à la hauteur h, et cette eau coule du trou à la vitesse v. On fera un dessin.

1. Pendant un petit intervalle de temps dt, l'eau coule par le trou et la hauteur de l'eau dans le seau varie de dh (une quantité négative car h diminue). Quelles sont, dans la liste de formules ci-dessous, celles qui donnent
   - la variation du volume d'eau dans le seau entre 0 et dt,
   - le volume d'eau qui a coulé par le trou entre 0 et dt.

   $$\pi A^2 dh, \qquad -2\pi A dh^2, \qquad \frac{4}{3}\pi(dh)^3, \qquad \pi a^2 v(dt), \qquad 2v^2 dt\, dh, \qquad \pi va A dt.$$

2. La conservation de l'énergie de l'eau contenue dans le seau, implique que h et v sont reliées par $h = \frac{1}{2}v^2$ (*en prenant la constante de gravité* $g = 1$*. Il est intéressant d'essayer d'expliquer pourquoi*). En déduire que h est solution de l'EDO, dite *loi de Torricelli (∼ 1640)*:

   $$h'(t) = -\left(\frac{a}{A}\right)^2 \sqrt{2h}.$$

3. Résoudre explicitement cette équation (uniquement pour les temps t positifs). Peut-on appliquer ici le théorème de Cauchy-Lipschitz ? Les solutions (pour $t \geq 0$) de cette équation sont-elles uniques ?

4. Une fois le seau vide, on cherche à savoir quand il était plein. Pour cela, on inverse le sens du temps dans l'équation (*i.e.* on fait le changement de variable $s = -t$). Montrer que l'équation devient

   $$\frac{dh}{ds}(s) = \left(\frac{a}{A}\right)^2 \sqrt{2h(s)}.$$

   Existe-t'il des solutions de cette équation qui vérifient $h(0) = 0$? Si oui, les donner toutes. Comparer avec les résultats connus sur l'unicité des solutions d'une EDO, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz. Expliquer mathématiquement pourquoi, quand le seau est vide, on ne peut plus savoir quand il a commencé à se vider.

Exercice 3 (Une EDO contractante)**.**

1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que y et y' convergent toutes les deux lorsque $t \to +\infty$. Montrer que l'on a forcément $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle $xg(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$.

2. Montrer que $g(0) = 0$.

3. On suppose de plus que $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle $y'(t) = g(y(t))$ sont définies jusqu'à $+\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle dont la borne droite est $+\infty$) et admettent une asymptote horizontale. Préciser laquelle.

Exercice 4 (Bloqué entre deux équilibres)**.** On considère une équation à variables séparables, i.e. que $y'(t) = g(y(t))h(t)$, $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On choisit deux zéros consécutifs $x_1 < x_2$ de la fonction g et une condition initiale (t_0, x_0), avec $x_0 \in]x_1, x_2[$. Montrer qu'alors la solution maximale telle que $y(t_0) = x_0$ est globale.

Application: On considère l'EDO $y' = y(y-1)\cos(t)$.

1. Résoudre explicitement l'équation.
2. Montrer qu'aucune solution autre que les solutions stationnaires ne possède d'asymptote horizontale.
3. Dessiner l'allure générale des solutions, en distinguant suivant la position de $y(0)$ par rapport à 0 et 1.

Exercice 5 (Explosions ou solutions globales)**.** On choisit un réel $\beta > 0$. Donner les solutions maximales de

$$x' = x^\beta \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Pour quelles valeurs de β, les solutions "explosent-elles"? Pour quelles valeurs de β, sont-elles globales?

Exercice 6 (Sensibilité par rapport aux perturbations)**.**
Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ une fonction globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable, $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et u_0, v_0 deux réels.
Soient u la solution maximale de

$$u'(t) = f(t, u(t))), \ t > 0, \tag{1a}$$
$$u(0) = u_0, \tag{1b}$$

et v la solution maximale de

$$v'(t) = f(t, v(t)) + \varepsilon(t), \ t > 0. \tag{2a}$$
$$v(0) = v_0, \tag{2b}$$

1. Justifier le fait que les solutions maximales u et v de (1) et (2) sont globales (c'est-à-dire définies sur $\mathbb{R}_+$ tout entier) .
2. Montrer que pour tout $t > 0$ on a

   $$|u(t) - v(t)| \leq e^{Kt}\left(|u_0 - v_0| + \int_0^t |\varepsilon(s)|\, ds\right),$$

   où K est une constante de Lipschitz de f.

En résumé de cet exercice, le lemme de Gronwall nous sert à montrer plusieurs résultats : unicité, existence globale, dépendance continue des solutions par rapport aux paramètres.

Exercice 7.
On considère sur $I =]1, +\infty[$, l'équation

$$x'(t) = 1 + \frac{cos^2 x(t)}{4t^2}.$$

1. Montrer que les solutions maximales existent, sont uniques et globales.
2. On pose $y\colon t \in I \mapsto x(t) - t$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par y. Montrer que y est croissante.
3. En majorant sa dérivée, montrer que y est majorée donc converge vers une limite que l'on notera y_∞. En déduire que x admet pour asymptote $t \mapsto t + y_\infty$.
4. y_∞ dépend de la condition initiale $x(1) = x_0$. Pour montrer cette dépendance on notera $y_\infty(x_0)$. Montrer que y_∞ est une fonction croissante de x_0.