Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 4, équations non linéaires du 1er ordre, exemple et champ des tangentes

Exercice 1 (Quotas de pêche)**.**

1. On s'intéresse maintenant à l'étude d'une population x de poissons. En l'absence de pêche, on modélise son évolution grâce à une équation logisitique (dont les coefficents ont été normalisés):

$$x' = x(1-x).$$

   Retrouver les solutions de ce système et rappeler leurs propriétés qualitatives.

2. Pour incoporer la pêche dans le modèle, on commence par proposer de rajouter un terme constant négatif $-c$, le quota de pêche que l'on supposera toujours rempli. La population de poissons satisfait alors:

$$x' = x(1-x) - c.$$

   Montrer qu'il y a une valeur critique c_c de c à partir de laquelle la pêche fait disparaître les poissons. Ce sera théoriquement le quota maximal pour préserver l'espèce. Y'a-t-il des risques à placer le quota juste en dessous de cette valeur critique ?

3. Une autre possibilité est de fixer un quota de pêche linéaire en fonction de x (solution rendue possible par la surveillance des populations de poissons). On obtient ainsi une nouvelle équation:

$$x' = x(1-x) - p\,x.$$

   (a) Montrer qu'il y a aussi une valeur critique p_c de p à partir de laquelle la pêche fait disparaître les poissons.
   (b) Si p est inférieur à p_c, montrer que les solutions tendent alors vers un équilibre $x_{eq} \neq 0$, dont on donnera l'expression en fonction de p.
   (c) La quantité de poissons pêchés sera donc, en régime stationnaire (c'est-à-dire quand x est proche de sa limite), de px_{eq}. Comment maximiser cette quantité ? Quelle est sa valeur maximale ?
   (d) Y'a-t-il un risque à placer le quota relatif p à ce maximum ? Quel système de quota choisiriez-vous si vous étiez responsable des ressources halieutiques ?

Remarque: Qu'en est-il des quotas de pêche dans la réalité ? De nombreuses observations ont montré que l'homme a dépassé depuis quelques temps la quantité de pêche critique pour de nombreuses espèces , comme le cabillaud dans l'Atlantique, le thon rouge ou le mérou dans la Méditérrannée, ce dernier étant protégé depuis peu (Pour plus de précision, voir les rapports du Conseil International pour l'Exploitation de la Mer). Des systèmes de quota ont été petit à petit mis en place, d'abord des limites globales du premier type, puis des quotas dépendant du stock de poissons comme dans le second modèle. Ces quota ne permettent pas encore d'assurer la survie des espèces de poissons. Mais, avec cette évolution, la gestion des populations halieutiques (*i.e.* de poissons) demande maintenant des bonnes connaissances en mathématiques et en systèmes dynamiques : un débouché pour les mathématiques ?

Exercice 2 (Représentation graphique)**.**
Pour une EDO en dimension 1, $y'(t) = f(t, y(t))$, on appelle champ des tangentes, la représentation sur $\mathbb{R}^2$ suivante:

au point $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ on dessine le vecteur $(1, f(t, y))$,
qui est en fait tangent à la solution de l'EDO qui passe par (t, y).

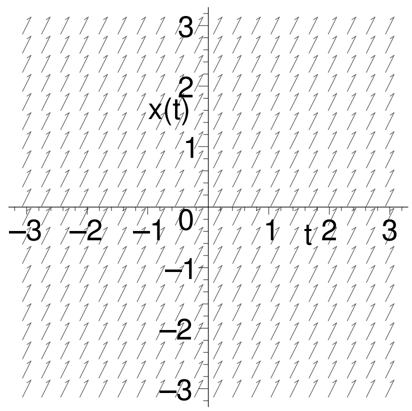
Pour les champs de tangentes 1 à 6 ci-dessous,

1. Dessiner quelques solutions sur les dessins (les courbes doivent être tangentes aux petits vecteurs).

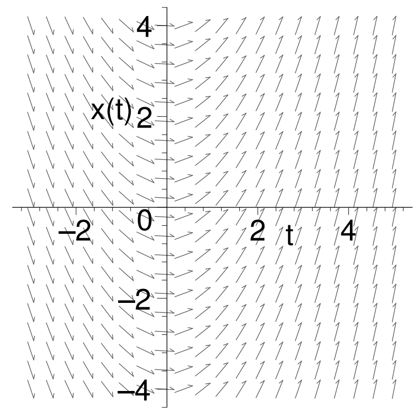
2. Associer chaque dessin à l'une des équations ci-dessous :

$$x' = 2, \quad x' = x - t, \quad x' = x, \quad x' = \frac{x}{t}, \quad x' = t, \quad x' = -\frac{t}{x}.$$

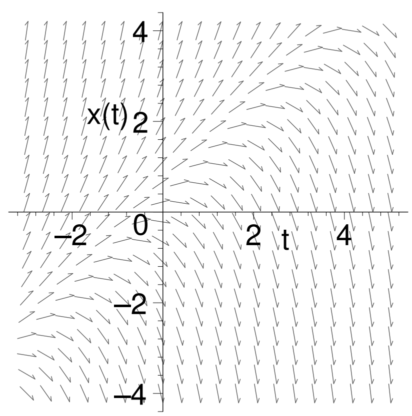
1)



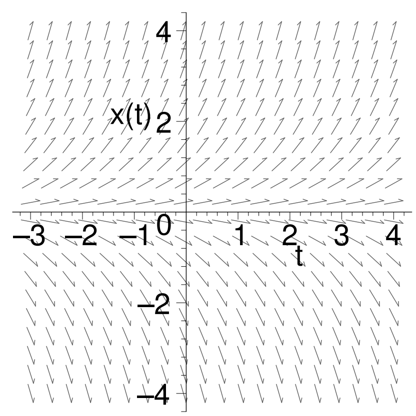
2)



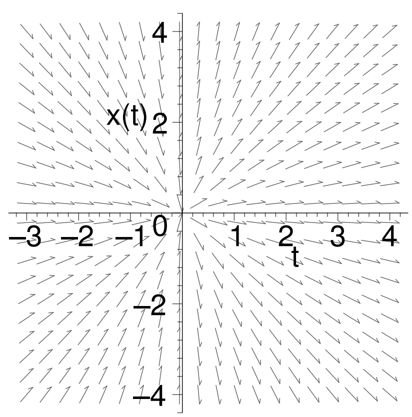
3)



4)



5)



6)