Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 5, équations linéaires du 2eme ordre

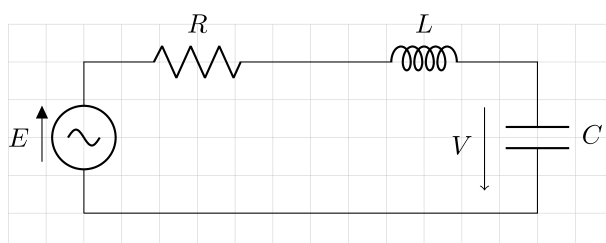
Exercice 1. On considère les équations suivantes, pour $t > 0$:

1. $x'' - 3x' + 2x = e^{-t}$,
2. $x'' - 2x' + x = sin(t)$,
3. $x'' + x = 0$,
4. $x'' + x' + x = 0$,
5. $x'' - 12x' + 9x = 0$,
6. $x'' - x = 5t + 2$,
7. $x'' + 6x' + 5x = e^{2t}$,
8. $x'' + 4x = 2sin(2t)$.

(i) Donner pour chaque équation une base de l'espace vectoriel des solutions (réelles) de l'équation homogène associée. Donner, le cas échéant, l'ensemble des solutions de l'équation non homogène.

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la solution pour les conditions initiales $x(0) = a$, $x'(0) = b$.

Exercice 2 (Circuit RLC (d'après l'examen de Juin 2016))**.**
On considère le circuit RLC constitué d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C en série et d'une résistance de résistivité R en série.



Le circuit est soumis à une tension E (en volts). On cherche à calculer la tension V (en volts) aux bornes du condensateur. On note I l'intensité (en ampères) du courant électrique dans le circuit. On rappelle que la fonction $t \mapsto V(t)$ vérifie l'équation suivante

$$LC\frac{d^2V(t)}{dt^2} + RC\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = E(t),\ t \in \mathbb{R}\ .$$

1. On suppose que $E = 0$ et $R = 0$. Déterminer la solution qui vérifie $V(0) = 1$ et $V'(0) = 0$.
2. On suppose que $L = C = R = 1$ et que $E(t) = \cos(2t)$. Déterminer la solution qui vérifie $V(0) = 1$ et $V'(0) = 0$.

Exercice 3 (Le pendule amorti)**.** On accroche une masse m à un ressort dans un milieu où elle est soumise à un frottement fluide. On notera x la position de la masse par rapport à son équilibre (ressort non tendu ni compressé). D'après le principe de Newton, l'équation vérifiée par la fonction $t \mapsto x(t)$ est:

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} - k\,x\ ,$$

où $\dot{x}$ et $\ddot{x}$ désignent les dérivées première et seconde de x. Les nombres λ, k sont positifs.

1. A quels phénomènes physiques, les termes $\lambda \dot{x}$ et $k\,x$ correspondent-ils ?

On pose $z : t \mapsto x\left(\sqrt{\frac{m}{k}}t\right)$. Montrer que z vérifie $\ddot{z} = -2\alpha\dot{z} - z$, pour un α que l'on précisera.

2. Cas $\alpha > 1$.
   (a) Donner les valeurs de μ_1 et μ_2 (en fonction de α, avec $\mu_1 < \mu_2$) pour lesquelles les solutions z s'écrivent: $z(t) = \beta_1 \exp^{\mu_1 t} + \beta_2 \exp^{\mu_2 t}$, avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.
   Donner la forme de la solution si $\beta_1\beta_2 \geq 0$.
   Donner la forme de la solution si $\beta_1\beta_2 < 0$, $|\beta_1| < |\beta_2|$ (remarquer que $z(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$).
   Donner la forme de la solution si $\beta_1\beta_2 < 0$, $|\beta_1| > |\beta_2|$ (pour quel $t > 0$ a-t-on $z(t) = 0$? $z'(t) = 0$?).
   (b) Donner la solution en fonction de la position initiale et de la vitesse initiale du ressort (c'est-à-dire $x(0)$ et $\dot{x}(0)$).

3. Cas $\alpha < 1$. On pose $\omega = \sqrt{1-\alpha^2}$.
   (a) Montrer que z peut s'écrire, avec $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$:
   $$z(t) = \exp^{-\alpha t}(\beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \sin(\omega t)).$$
   Déduire de cette expression la forme des solutions.
   (b) On suppose qu'à $t = 0$, la masse qui était retenue en x_0 est soudain liberée. Que vaut la condition initiale (c'est-à-dire position initiale et vitesse initiale)? Exprimer la solution en fonction de cette condition initiale.
   (c) Donner la solution en fonction de la condition initiale.
   (d) Vérifier que dans le cas où $\alpha = 0$, on obtient bien les résultats du pendule sans frottement.

4. Cas $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que les solutions sont de la forme $z(t) = e^{-t}(a + b\,t)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner la solution en fonction de la position initiale et de la vitesse initiale du ressort.

Exercice 4 (Equation d'Euler)**.**
Trouver les solutions de l'équation d'Euler en utilisant le changement de variable $t = e^x$
$$t^2y''(t) + 2ty'(t) - 6y(t) = 0,\ t \in]0, +\infty[.$$

Exercice 5 (L'équation de Bessel, exercice difficile)**.**
On considère ici l'équation de Bessel
$$(E_0) \quad t^2x'' + tx' + t^2x = 0.$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière à l'origine. Quel est leur intervalle de définition ?
2. On peut montrer que l'équation de Bessel admet sur $]0, +\infty[$ une solution non bornée en 0 (la démonstration de cette assertion demande des notions non encore vues en cours). En déduire que toutes les solutions définie en 0 sont développables en série entière à l'origine.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Existe-t-il une solution ϕ de (E_0) telle que $\phi(0) = a$?
4. Soit la fonction B définie par
   $$B(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\sin\theta)d\theta.$$
   Montrer que B est solution de (E_0). Quelles sont les solutions de (E_0) qui sont définies en 0 ? Pour une telle solution, quelle est la valeur en 0 de la dérivée ?