Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 6, Systèmes linéaires

Exercice 1 (Systèmes triangulaires)**.**
Calculer les solutions des systèmes ci-dessous, avec conditions initiales (x_0, y_0) ou (x_0, y_0, z_0).

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 3y \\ z' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + 3y - 2z \\ y' = 5y \\ z' = y - z \end{cases}$$

Exercice 2 (Systèmes en dimension 2)**.**
Donner l'ensemble des solutions de chacun des systèmes ci-dessous.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

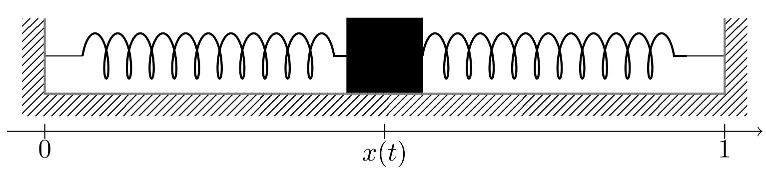
Exercice 3.

1. Voici les solutions que j'ai montrées au prof pour le système différentiel $X' = AX$ à coefficients constants qu'il a demandé de résoudre :
$$u(t) = \begin{bmatrix} te^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$
Il y a juste jeté un oeil et m'a dit que c'était faux. Pourtant j'ai vérifié que u et v sont bien linéairement indépendantes. Ce prof, si ca se trouve, il a dit n'importe quoi. . . Comment savoir ?

2. J'ai fait un avion avec mon brouillon d'équations différentielles et j'ai lancé par la fenêtre la matrice A de départ (qui était, je me rappelle, à coefficients constants). Il ne me reste que les solutions :
$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^t - \mu e^{2t} \\ y(t) = -\lambda e^t + \mu e^{2t} \end{cases}$$
Pour terminer l'exercice, il faudrait que je retrouve A. Est-ce possible ?

3. J'ai passé deux heures sur un système différentiel $X' = AX$ à coefficients constants. Ma copine, qui veut toujours avoir raison, dit que mes solutions
$$X(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^t \begin{bmatrix} t-1 \\ t+1 \\ t-1 \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$
sont fausses, mais elle ne me donne aucun argument convaincant. Comment savoir si elle dit vrai, sans refaire les calculs ?

Exercice 4 (Ressort (d'après l'Examen 2016))**.**
<u>Partie I:</u> On s'intéresse à la position horizontale à l'instant t, notée $x(t)$ (on a donc $x(t) \in \mathbb{R}$), d'une masse attachée par deux ressorts à deux points respectivement à gauche et à droite et soumise à une force de frottements.



En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on trouve (avec une hypothèse convenable sur les longueurs des ressorts et leurs raideurs) que la position horizontale x doit vérifier l'EDO suivante, où $\lambda > 0$ et $\mu \geq 0$,

$$x''(t) = \lambda(1 - x(t)) - \lambda x(t) - \mu x'(t).$$

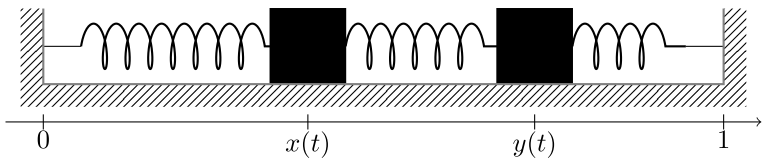
1. À quelles forces sont associés les différents termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation ?

2. Montrer que cette équation peut se mettre sous la forme d'un système différentiel de la forme $Y' = AY + b$, où A est une matrice 2×2 et b un vecteur que l'on explicitera.

3. On suppose que $\lambda = 2$ et $\mu = 1$, expliciter la solution qui vérifie $x(0) = x_0 \in]0, 1[$ et $x'(0) = 0$.

4. On cherche à approcher les solutions de cette équation sur l'intervalle $[0, 1]$. Ecrire le schéma d'Euler explicite associé à ce problème et calculer une approximation de $x(2h)$, où h désigne le pas de temps utilisé pour la discrétisation (on suppose toujours que $\lambda = 2$ et $\mu = 1$).

Partie II: on considère deux masses de positions $x(t)$ et $y(t)$: la première masse est reliée par un ressort à un point fixe situé en 0, la seconde est reliée par un ressort à un point fixe situé en 1, et les deux masses sont reliées entre elles par un ressort.



Si on néglige les frottements, le principe fondamental de la dynamique (toujours avec une hypothèse convenable sur les longueurs des ressorts et leurs raideurs) mène au système d'EDO suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = -\,x(t) + \big(y(t) - x(t)\big), \\ y''(t) = -\big(y(t) - x(t)\big) + \big(1 - y(t)\big). \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que la fonction $Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ est solution d'un système différentiel d'ordre un de la forme

$$Z' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} Z + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} := CZ + d \tag{2}$$

2. Montrer que le système (2) admet un unique point d'équilibre Z^* que l'on déterminera.

3. On pose $W(t) = Z(t) - Z^* := \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \\ w_4(t) \end{bmatrix}$. Déterminer le système différentiel satisfait par W.

4. On pose $s(t) = w_1(t) + w_3(t)$ et $d(t) = w_3(t) - w_1(t)$. Vérifier que $s'' = -s$ et $d'' = -3d$.
   Résoudre ces deux problèmes et en déduire l'expression de $x(t)$ et de $y(t)$ en fonction des données initiales.