Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 7, Exponentielles de matrices

Exercice 1 (Quelques exponentielles de matrices)**.**

1. Pour les matrices ci-dessous, calculer e^{A_i}.

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

   où μ et λ sont des paramètres réels.

   [Plusieurs méthodes sont possibles. On peut, par exemple, calculer A_i^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis e^{A_i} ou calculer la solution générale du système différentiel $Y'(t) = A_i Y(t)$ et en déduire e^{A_i}.]

2. Utiliser les résultats de la question précédente pour calculer l'exponentielle des matrices suivantes:

$$B_0 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Propriétés utiles de l'exponentielle)**.**

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $B = PAP^{-1}$. Montrer que $e^B = Pe^A P^{-1}$.

2. Montrer que la matrice A_3 (respectivement A_4) de l'exercice 1 est semblable à la matrice C_3 (respectivement C_4) définie ci-dessous

$$C_3 = \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix},$$

   et trouver les matrices de passages P_3 et P_4, telles que $A_3 = P_3 C_3 P_3^{-1}$ et $A_4 = P_4 C_4 P_4^{-1}$.

3. Quel lien y-a-t-il entre e^{A^t} et $(e^A)^t$ (où "t" désigne ici l'opérateur de transposition) ?

   En déduire que

   - Si A est symétrique, e^A est symétrique.
   - Si A est anti-symétrique, e^A est orthogonale.

Exercice 3 (Déterminant de e^A)**.**

1. Soit A une matrice diagonale complexe de taille $n \times n$. Calculer $\det(e^A)$.

2. Calculer maintenant $\det(e^A)$ en supposant seulement que A est diagonalisable.

3. Soit A une matrice triangulaire supérieure de taille $n \times n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est triangulaire supérieure et calculer ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de A. En déduire que e^A est triangulaire supérieure et calculer ses coefficients diagonaux en fonction de ceux de A.

4. Déduire de la question précédente que pour toute matrice carrée complexe A

$$\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

Exercice 4 (D' après l'Examen de seconde session 2016)**.**
On considère le système différentiel suivant avec $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = cx + y \\ y' = -x + cy \end{cases}$$

1. Soit A, B deux matrices carrées de même taille. Sous quelle condition peut-on écrire $e^{A+B} = e^A e^B$?
2. Écrire le système ci-dessus sous la forme $X' = AX$, avec $X = (x, y)^t$ et A une matrice 2×2.
3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer l'exponentielle de matrice e^{tA}.
4. En déduire la solution du système ci-dessus qui vérifie $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$.

Exercice 5 (Systèmes avec second membre)**.**

1. Calculer les solutions de la partie homogènes des systèmes ci-dessous (où t est la variable temporelle) avec pour conditions initiales $(1, 0)$ ou $(1, 0, 0)$ suivant la dimension.

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 3y + e^t \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 3y - 2z + \cos t \\ y' = -2x + 5y - 2z \\ z' = -x + y - z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 4y - 3z - t \\ y' = -2x + 5y - 2z \\ z' = -x + 2z \end{cases}$$

2. Calculer les exponentielles de matrices associées à ces systèmes sans second membre.
3. Indiquer sous quelle forme on peut trouver une solution particulière à chacun de ces systèmes.