Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, équations différentielles ordinaires
TD 9, système non linéaire, stabilité

Exercice 1 (Systèmes mécaniques et stabilité)**.**
On considère un corps de masse 1 soumis à une force conservative, ce qui signifie qu'il existe une énergie potentielle qui vaut $E_p(x)$ au point x de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ et que la force induite par l'energie potentielle en ce point est $-\nabla E_p(x)$. On supposera pour l'étude que l'énergie est une fonction de classe C^2. A l'instant t, le corps est à la position $x(t) \in \mathbb{R}^n$. L'équation vérifiée par x est donc:

$$\ddot{x}(t) = -\nabla E_p(x(t)).$$

1. On introduit la vitesse $v = \dot{x}$. Écrire le système d'EDO du premier ordre vérifié par le couple (x, v).

2. Que vérifient les points d'équilibre ? Que sont-ils pour l'énergie E_p ?

On introduit l'énergie totale du système $E(x, v) = E_p(x) + \frac{1}{2}v^2$.

3. Montrer que l'énergie totale reste constante le long des trajectoires du système.

Pour la suite de l'exercice, on suppose que $n = 1$.

4. On suppose, dans cette question que le corps est accroché à un ressort. Il est alors soumis à une force de rappel égale à $-kx$, avec $k > 0$ donné. Retrouver l'énergie potentielle puis l'énergie totale. Même question pour un ressort mou, avec une force de rappel égale à $-kx^3$.

On retourne au cas général et on choisit un point d'équilibre x_0. On pose $y = x - x_0$ et on considère le système linéarisé au voisinage de x_0.

5. Ecrire ce système linéarisé, et donner les conditions pour qu'il soit stable, instable. En déduire des conditions pour que le système initial soit stable ou instable.

6. Appliquer les résultats de la question 5 aux deux exemples de la question 4. Cela s'applique-t-il au second cas ?

   Dans le cas du pendule mou, dessiner le graphe de l'énergie potentielle en fonction de la position, et déduire d'un raisonnement graphique que le point d'équilibre est stable.

On ajoute maintenant au système une force de frottement non conservative (c'est-à-dire que ce n'est pas le gradient d'une fonction) de la forme $f(v)v$. Il devient:

$$\ddot{x} = -\nabla E_p(x) - f(v)v.$$

On suppose que f est de classe C^1 et positive.

7. Montrer que cette fois l'énergie totale est décroissante le long des trajectoires.

   On reprend les deux exemples de la question 4 en leur ajoutant une force de frottement avec $f(v) = 1$. Montrer que dans ces deux cas le point d'équilibre est devenu asymptotiquement stable.