Examen de décembre 2013.
Corrigé du 1er exercice (prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour retrouver l'examen).

Exercice 6.18 (Généralisation de l'exercice 6.17) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Soit p une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $q \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < p(x) \le q$ pour tout $x \in E$.

1. (Question liminaire) Pour $(a, p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$, on pose

$$\psi(a,p) = a^p = \begin{cases} e^{p\ln(a)} & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Montrer que ψ est continue de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$.

Corrigé – *Soit $(a,p) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ et (a_n, p_n) une suite de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^\star$ telle que $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $p = \lim_{n\to+\infty} p_n$. Pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} \psi(a_n,p_n) = \psi(a,p)$, on distingue deux cas :*

Premier cas

On suppose $a \neq 0$. On peut alors supposer que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} p_n \ln a_n = p \ln a$ et on en déduit la continuité de ψ au point (a,p).

Second cas

On suppose $a = 0$. Pour tout n tel que $a_n = 0$, on a $\psi(a_n,p_n) = \psi(a,p) = 0$. On peut donc se restreindre au cas $a_n > 0$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} p_n \ln a_n = -\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \psi(a_n,p_n) = 0 = \psi(a,p)$. ce qui donne la continuité de ψ au point (a,p) et termine cete question.

2. Montrer que l'application $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable (de E dans $\mathbb{R}_+$).

Corrigé – *Comme f est mesurable, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Comme p est mesurable positive, il existe une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telle que $\lim_{n\to+\infty} p_n(x) = p(x)$ pour tout $x \in E$. On peut même supposer que $p_n(x) > 0$ pour tout n et tout x (il suffit, par exemple, de remplacer la fonction p_n par la fonction $p_n + 1/n$).*

On pose $h_n(x) = |f_n(x)|^{p_n(x)} = \psi(|f_n(x)|, p_n(x))$.

La fonction h_n est étagée (et donc mesurable). La continuité de ψ nous donne $\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = |f(x)|^{p(x)}$ pour tout $x \in E$. On en déduit que la fonction $x \mapsto |f(x)|^{p(x)}$ est mesurable.

On suppose maintenant que

- $\displaystyle\int |f(x)|^{p(x)} dm(x) < +\infty$,
- $\displaystyle\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, quand $n \to +\infty$,

- $f_n \to f$ p.p..

3. Montrer que $\displaystyle\int |f_n(x) - f(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

[On pourra appliquer le lemme de Fatou à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \mathrm{M}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ en choisissant convenablement M dans $\mathbb{R}$.]

Corrigé – *On choisit* $\mathrm{M} = 2^q$. *Pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x \in \mathrm{E}$, *on pose donc*

$$g_n(x) = 2^q|f_n(x)|^{p(x)} + 2^q|f(x)|^{p(x)} - |f_n(x) - f(x)|^{p(x)}.$$

Comme $|f(x) - f_n(x)| \le |f(x)| + |f_n(x)| \le 2\max\{|f_n(x)|, |f(x)|\}$, *on a*

$$|f(x) - f_n(x)|^{p(x)} \le 2^{p(x)} \max\{|f_n(x)|, |f(x)|\}^{p(x)} \le 2^{p(x)}|f_n(x)|^{p(x)} + 2^{p(x)}|f(x)|^{p(x)}.$$

Comme $p(x) \le q$, *on en déduit*

$$|f(x) - f_n(x)|^{p(x)} \le 2^q|f_n(x)|^{p(x)} + 2^q|f(x)|^{p(x)}.$$

On a donc $g_n(x) \ge 0$.

La question précédente donne que g_n *est mesurable et comme* $f_n \to f$ *p.p., on a* $g_n \to 2^{q+1}|f|^p$ *p.p.. Le lemme de Fatou (lemme 4.19) donne alors :*

$$\int 2^{q+1}|f|^p dm \le \liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm.$$

Comme $\int |f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to \int |f(x)|^{p(x)} dm(x)$, *on a*

$$\liminf_{n\to+\infty} \int g_n dm = 2^{q+1} \int |f(x)|^{p(x)} dm(x) - \limsup_{n\to+\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x).$$

On a donc

$$\int 2^{q+1}|f(x)|^{p(x)} dm(x) \le 2^{q+1} \int |f(x)|^{p(x)} dm(x) \\ - \limsup_{n\to+\infty} \int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x).$$

On en déduit que $\int |f(x) - f_n(x)|^{p(x)} dm(x) \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

Corrigé du 2eme exercice (posé avec $N = 1$ à l'examen)

Exercice 8.3 (Convergence après translation)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, $N \geq 1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $u \in L^p$ tel que $u_n \to u$ dans L^p. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

1. On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $u_n(\cdot + h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de remarquer que* $u_n(\cdot+h_n)-u = u_n(\cdot+h_n)-u(\cdot+h_n)+u(\cdot+h_n)-u$ *et donc*

$$\|u_n(\cdot + h_n) - u\|_p \leq \|u_n(\cdot + h_n) - u(\cdot + h_n)\|_p + \|u(\cdot + h_n) - u\|_p.$$

Comme $\|u_n(\cdot + h_n) - u(\cdot + h_n)\|_p = \|u_n - u\|_p$, *on a donc*

$$\|u_n(\cdot + h_n) - u\|_p \leq \|u_n - u\|_p + \|u(\cdot + h_n) - u\|_p.$$

Soit $\varepsilon > 0$, *comme* $u_n \to u$ *dans* L^p, *il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|u_n - u\|_p \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $u \in L^p$, *la continuité en moyenne (théorème 8.5) donne l'existence de* $\delta > 0$ *tel que*

$$|h| \leq \delta \Rightarrow \|u(\cdot + h) - u\|_p \leq \varepsilon.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, *il existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tel que* $|h_n| \leq \delta$ *pour* $n \geq n_2$. *On a donc*

$$n \geq \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \|u_n(\cdot + h_n) - u\|_p \leq 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien que $u_n(\cdot + h_n) \to u$ *dans* L^p *quand* $n \to +\infty$.

2. On suppose $p = +\infty$. Donner un exemple pour lequel $u_n(\cdot + h_n) \not\to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (on pourra se limiter a $N = 1$).

Corrigé – *Il suffit de prendre* $u_n = u$ *pour tout* n *et, par exemple,* $u = 1_{\mathbb{R}_+}$. *Pour tout* $h \neq 0$, *on a* $\|u(\cdot + h) - u\|_\infty = 1$. *Il suffit donc de prendre, par exemple,* $h_n = 1/n$.

Corrigé du problème sur Fourier en deux parties

Partie A

Soit $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ l'espace vectoriel normé des (classes de) fonctions Lebesgue intégrables avec $1 \leq p < +\infty$. La transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$ est

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\mathbf{i}tx} dx$$

et pour tout s réel tel que $s < -1/2$, on définit

$$N_s(f) := \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(t)|^2 (1+t^2)^s dt \right)^{1/2}.$$

1) Montrer que $N_s(f) < \infty$.

corrigé

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $s < -1/2$. La fonction $t \mapsto (1+t^2)^s$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et la fonction $\hat{f}$ est bornée. La fonction $t \mapsto \hat{f}(t)(1+t^2)^s$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$

---

2) Montrer que si $N_s(f) = 0$, alors $f = 0$.

corrigé

Si $N_s(f) = 0$ (toujours avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $s < -1/2$), on a nécessairement $|\hat{f}(t)|^2(1+t^2)^s = 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ et donc $\hat{f} = 0$ p.p. et même $\hat{f}(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car $\hat{f}$ est continue).
Comme la transformée de Fourier est injective de $L^1(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on en déduit bien $f = 0$ p.p..

---

3) Exprimer $N_s(f)$ à l'aide de la norme $\|\cdot\|_2$: en déduire que $f \mapsto N_s(f)$ est une norme sur $L^1(\mathbb{R})$.

corrigé

$N_s(f) = \|\hat{f}(1+(\cdot)^2)^{s/2}\|_2$. Comme la transformation de Fourier est une application linéaire, on en déduit que pour tout $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $N_s(f+g) \leq N_s(f) + N_s(g)$ et $N_s(\alpha f) = |\alpha| N_s(f)$. Avec la question précédente on en déduit que N_s est bien une norme sur $L^1(\mathbb{R})$.

---

4) Soit $(h_n)_{n>0}$ une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|h_n\|_1 = 1$, pour tout entier n, et pour laquelle il existe une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \hat{h}_n(t) = H(t).$$

a) Montrer que $|\hat{h}_n(t) - H(t)| \leq 2$ pour tout t réel.

corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\hat{h}_n(t)| \leq 1/\sqrt{2\pi} \int |h_n(x)| dx = 1/\sqrt{2\pi} \|h_n\|_1 \leq 1$.
Comme $\lim_{n\to+\infty} \hat{h}_n(t) = H(t)$, on a donc aussi $|H(t)| \leq 1$. On en déduit bien, pour tout n et tout t, que $|\hat{h}_n(t) - H(t)| \leq 2$.

---

b) Montrer que

$$\left|\hat{h}_n(t) - H(t)\right|^2 \left(1+t^2\right)^s \to 0 \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R})$$

(préciser le théorème de convergence que vous utilisez) et en déduire que la suite $(h_n)_{n>0}$ est de Cauchy pour la norme N_s.

corrigé

On utilise le théorème de convergence dominée avec $g_n(t) = \left|\hat{h}_n(t) - H(t)\right|^2 \left(1+t^2\right)^s$ et $G(t) = 4\left(1+t^2\right)^s$.
On a bien $g_n \to 0$ p.p. et $|g_n| \leq G$ p.p. avec $G \in L^1(\mathbb{R})$. On en déduit que $g_n \to 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ (et donc que $\|(\hat{h}_n - H)(1+(\cdot)^2)^{s/2}\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$).

Pour montrer que la suite $(h_n)_{n>0}$ est de Cauchy pour la norme N_s, il suffit de remarquer que pour tout $n, m \in \mathbb{R}$ on a

$$N_s(h_n - h_m) = \|(\hat{h}_n - \hat{h}_m)(1+(\cdot)^2)^{s/2}\|_2 \leq \|(\hat{h}_n - H)(1+(\cdot)^2)^{s/2}\|_2 + \|(H - \hat{h}_m)(1+(\cdot)^2)^{s/2}\|_2,$$

et d'utiliser le fait que $\|(\hat{h}_n - H)(1+(\cdot)^2)^{s/2}\|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

Partie B

1) Soit une fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$ et un réel non nul a, on pose

$$h_a(x) = ah(ax).$$

a) Démontrer que $\hat{h}_a(t) = \hat{h}\left(\dfrac{t}{a}\right)$.

corrigé

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a, avec le changement de variable $y = ax$,

$$\hat{h}_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ah(ax)e^{-ixt}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(y)e^{-i\frac{yt}{a}}dy = \hat{h}(\frac{t}{a}).$$

---

b) Que valent $\lim\limits_{a\to 0} \hat{h}_a(t)$ et $\lim\limits_{a\to+\infty} \hat{h}_a(t)$? (utiliser les propriétés de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$)

corrigé

On utilise le fait que $\hat{h} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
Pour $t \neq 0$ on a $\lim_{a\to 0} \hat{h}_a(t) = \lim_{a\to 0} \hat{h}(\frac{t}{a}) = 0$.
Pour $t = 0$, on a $\lim_{a\to 0} \hat{h}_a(t) = \hat{h}(0)$.
On a aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{a\to+\infty} \hat{h}_a(t) = \lim_{a\to+\infty} \hat{h}(\frac{t}{a}) = \hat{h}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x)dx$.

---

2) On suppose maintenant que
(i) : h est continue, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h(x) = 0$ pour $x \notin [-1, 1]$;
(ii) : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = 1$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx = 1$, quelque soit l'entier $n > 0$.

corrigé

En utilisant le changement de variable $y = nx$ on obtient

$$\int h_n(x)dx = \int nh(nx)dx = \int h(y)dy = 1.$$

---

b) Pour deux fonctions à valeurs complexes, f borélienne et bornée et g intégrable, on pose :

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle f, h_n\rangle$ dans le cas où la fonction f est continue en 0.

corrigé

La fonction h est supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$. La définition de h_n et le changement de variable $y = nx$ donnent

$$\langle f, h_n\rangle = \int f(x)h_n(x)dx = \int f(x)nh(nx)dx = \int f(\frac{y}{n})h(y)dy.$$

On utilise maintenant le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n(x) = f(x/n)h(x)$. Comme f est continue en 0, on $g_n \to f(0)h$ p.p.. Comme f est bornée, on a $|g_n| \leq \|f\|_\infty |h|$ p.p.. (On rappelle que $h \in L^1(\mathbb{R})$.) Le théorème de convergence dominée donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \langle f, h_n \rangle = f(0) \int h(x)dx = f(0).$$

---

c) En utilisant la question 4 de la partie A, démontrer que la suite $(h_n)_{n>0}$ est une suite de Cauchy pour la norme N_s.

corrigé

On remarque tout d'abord que la suite $(h_n)_{n>0}$ est bien une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|h_n\|_1 = 1$ pour tout entier n. Puis, soit $t \in \mathbb{R}$. On a, en posant $f(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-ixt}$,

$$\hat{h}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h_n(x)e^{-ixt}dx = \langle f, h_n \rangle.$$

Comme f est continue en 0, la question précédente donne $\lim_{n\to+\infty} \hat{h}_n(t) = H(t)$ avec $H(t) = 1/\sqrt{2\pi}$. On peut donc appliquer la question 4 de la partie A, elle donne que la suite $(h_n)_{n>0}$ est une suite de Cauchy pour la norme N_s.
