Chapitre 4

Fonctions intégrables

Maintenant qu'on a construit un espace mesuré (E, T, m) (dont un exemple fondamental est $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), on voudrait généraliser la notion d'intégrale grâce à cet espace, c'est-à-dire introduire une application qui à f, fonction de E dans $\mathbb{R}$, associe un réel, dépendant de la mesure m, que nous noterons $\int f dm$, tel que :

- Si $f = 1_A$, $A \in T$, alors $\int f dm = m(A)$,
- L'application ainsi définie soit linéaire, c'est-à-dire que pour toutes fonctions f et g définies de E dans $\mathbb{R}$,

$$\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm, \ \forall \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

En fait, on ne peut pas définir une telle application sur *toutes* les fonctions de E dans $\mathbb{R}$, nous allons la définir seulement sur les fonctions que nous appellerons "intégrables".
La construction de cette nouvelle intégrale se déroule, comme pour l'intégrale des fonctions continues décrite au chapitre 1 en 3 étapes, que nous pouvons dans le cas (non limitatif) des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, décrire ainsi :

1. Mesurer presque toutes les parties de $\mathbb{R}$ (et pas seulement les intervalles).
2. Définir l'intégrale des fonctions étagées, c'est-à-dire des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (et pas seulement des fonctions en escalier).
3. Par un passage à la limite, définir l'intégrale des fonctions limites (en un sens convenable) de fonctions étagées.

Pour être plus précis, dans l'étape 1 ci-dessus, on cherche une application

$$\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\lambda(]\alpha, \beta[) = \beta - \alpha, \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta. \tag{4.1}$$

$$\lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n), \ \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ t.q. } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ si } n \neq m. \tag{4.2}$$

(Dans toute la suite de ce cours, la notation $\sum_{n \in \mathbb{N}}$ est identique à $\sum_{n=0}^{+\infty}$.)
Une telle application sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ n'existe pas (voir l'exercice 2.29), mais on sait qu'elle existe si on se limite à une partie convenable de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, par exemple, la tribu de Borel définie précédemment.

Pour l'étape 2, on intégrera les fonctions prenant un nombre fini de valeurs et pour lesquelles chaque étage est dans la tribu de Borel et est de mesure finie. De telles fonctions seront dites étagées et intégrables.

Enfin, à l'étape 3, l'idée principale est de définir l'intégrale des fonctions positives qui sont limites croissantes d'une suite de fonctions étagées (on remplace donc la convergence uniforme utilisée pour la définition de l'intégrale des fonctions réglées par une convergence simple en croissant).

4.1 Intégrale d'une fonction étagée positive

Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. On rappelle que $\mathcal{E}_+$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}$, ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Si $f \in \mathcal{E}_+$, f non nulle, le lemme 3.6 nous donne, en particulier, l'existence d'une famille $(a_i,\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$, si $i \neq j$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, et $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. D'autre part, le lemme 3.7 nous permet d'affirmer que, pour une fonction étagée positive qu'on écrit sous la forme : $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$, où les A_i sont deux à deux disjoints et les a_i sont strictement positifs, la valeur $\sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i)$ est indépendante de la décomposition choisie. On peut donc définir l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.1 (Intégrale d'une fonction de $\mathcal{E}_+$) *Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et soit f de E dans $\mathbb{R}$ une fonction étagée positive non nulle (c'est-à-dire $f \in \mathcal{E}_+$). Soient $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ une famille de parties disjointes deux à deux (i.e. t.q. $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et n réels $a_1,\ldots,a_n$ strictement positifs tels que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. On définit l'intégrale de f, qu'on note $\int f dm$, par : $\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i)$ (on a donc $\int f dm \in \overline{\mathbb{R}}_+$). D'autre part, si $f = 0$, on pose $\int f dm = 0$.*

Remarque 4.2 En adoptant la convention $0 \times +\infty = 0$, on peut aussi remarquer que si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \in \mathcal{E}_+$, où la famille $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ est t.q. $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et où les réels $a_1,\ldots,a_n$ sont supposés positifs seulement, on a encore :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i).$$

Proposition 4.3 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{E}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

- *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{E}_+$, et $\int (\alpha f + \beta g) dm = \alpha \int f dm + \beta \int g dm$,*
- *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f dm \geq \int g dm$.*

Démonstration – Il est facile de montrer que si $f \in \mathcal{E}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et $\int \alpha f dm = \alpha \int f dm$. Pour montrer la linéarité positive, il suffit donc de considérer le cas $\alpha = \beta = 1$ et f et g non nulles. Soit donc $f, g \in \mathcal{E}_+$, non nulles. D'après le lemme 3.6 sur la décomposition canonique des fonctions étagées positives non nulles, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } g = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{\mathrm{B}_j},$$

avec $0 < a_1 < \ldots < a_n$, $\mathrm{A}_i \neq \emptyset$ pour tout i, $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $0 < b_1 < \ldots < b_m$, $\mathrm{B}_j \neq \emptyset$ pour tout j, $\mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_i = \emptyset$ si $j \neq i$. En posant $a_0 = b_0 = 0$, $\mathrm{A}_0 = (\bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i)^c$ et $\mathrm{B}_0 = (\bigcup_{j=1}^n \mathrm{B}_j)^c$, on a aussi

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \text{ et } g = \sum_{j=0}^{m} b_j 1_{\mathrm{B}_j}$$

et on peut écrire

$$f + g = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} (a_i + b_j) 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j} = \sum_{(i,j)\in \mathrm{K}} (a_i + b_j) 1_{\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j},$$

avec $\mathrm{K} = \{(i,j) \in \{0,\ldots,n\} \times \{0,\ldots,m\} \setminus (0,0)\}$.

On a donc $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int (f+g)dm = \sum_{(i,j)\in\mathrm{K}} (a_i + b_j) m(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j)$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int (f+g)dm &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i m(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_j m(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i) + \sum_{j=1}^{m} b_j m(\mathrm{B}_j)\end{aligned}$$

(car $(\mathrm{A}_0,\ldots,\mathrm{A}_n)$ et $(\mathrm{B}_0,\ldots,\mathrm{B}_m)$ sont des partitions de E). On a donc bien montré que

$$\int (f+g)dm = \int f dm + \int g dm.$$

Il reste à montrer la monotonie. Soit $f, g \in \mathcal{E}_+$ t.q. $f \geq g$. On a donc $f - g \in \mathcal{E}_+$ (on rappelle que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, voir la proposition 3.9) ; et comme $\int (f-g)dm \geq 0$, la linéarité positive nous donne que

$$\int f dm = \int (f-g)dm + \int g dm \geq \int g dm.$$

. ■

Remarque 4.4

1. Une conséquence directe de la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, si $f \in \mathcal{E}_+$, pour n'importe quelle décomposition de f : $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{\mathrm{A}_i} \in \mathcal{E}_+$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ et $(\mathrm{A}_i)_{i=1,\ldots,n} \subset \mathrm{T}$ (on ne suppose plus $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \emptyset$ si $i \neq j$), on a encore, par linéarité positive :

$$\int f dm = \sum_{i=1}^{n} a_i \int 1_{\mathrm{A}_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i m(\mathrm{A}_i),$$

en posant $a_i m(\mathrm{A}_i) = 0$ si $a_i = 0$.

2. Une conséquence de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ est que, pour tout $f \in \mathcal{E}_+$, on a :

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

4.2 Intégrale d'une fonction mesurable positive

On donne maintenant un petit lemme fondamental qui va permettre de définir l'intégrale des fonctions de $\mathcal{M}_+$.

Lemme 4.5 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$*, et* $g \in \mathcal{E}_+$*, tels que :*

- *$f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathrm{E}$,*
- *$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \geq g(x)$, pour tout $x \in \mathrm{E}$,*

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, dm \geq \int g \, dm. \tag{4.3}$$

Noter que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$, donc sa limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

DÉMONSTRATION – Pour $x \in \mathrm{E}$, on pose $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cette limite existe et appartient à $\overline{\mathbb{R}}_+$). Il se peut que $f \notin \mathcal{E}_+$, mais on a toujours $f \in \mathcal{M}_+$ et les hypothèses du lemme donnent $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, on définit, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}\,;\, \alpha g(x) \leq f_n(x)\}.$$

On a donc

$$\mathrm{A}_n = (f_n - \alpha g)^{-1}([0,+\infty[) \in \mathrm{T}, \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$$

(car $f_n \leq f_{n+1}$) et $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. En effet, si $x \in \mathrm{E}$, on distingue deux cas :

1. Si $g(x) = 0$, alors $x \in \mathrm{A}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$,
2. Si $g(x) > 0$, on a alors

$$\alpha g(x) < g(x) \leq \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Il existe donc n_x (dépendant de x) tel que $x \in \mathrm{A}_n$ pour $n \geq n_x$. Donc, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$.

On a donc bien montré que

$$\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n.$$

(Comme $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{A}_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(\alpha g 1_{\mathrm{A}_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement et en croissant vers la fonction αg.)

On remarque maintenant que $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \in \mathcal{E}_+$, $f_n \in \mathcal{E}_+$ et que, grâce à la définition de A_n, on a $\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} \leq f_n$. La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm \leq \int f_n dm. \tag{4.4}$$

En utilisant la décomposition canonique de g (lemme 3.6), il existe une famille $(b_i, \mathrm{B}_i)_{i=1,\ldots,p}$ telle que $0 < b_1 < \ldots < b_p$, $\mathrm{B}_i \neq \emptyset$ pour tout i, $\mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $g = \sum_{i=1}^p b_i 1_{\mathrm{B}_i}$. On a donc

$$\alpha g 1_{\mathrm{A}_n} = \sum_{i=1}^p \alpha b_i 1_{\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n}$$

et donc :

$$\int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n).$$

Comme $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n) = \mathrm{B}_i \cap \mathrm{E} = \mathrm{B}_i$, la continuité croissante de m donne $m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) \to m(\mathrm{B}_i)$, quand $n \to +\infty$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \int \alpha g 1_{\mathrm{A}_n} dm = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i \cap \mathrm{A}_n) = \sum_{i=1}^p \alpha b_i m(\mathrm{B}_i) = \int \alpha g dm.$$

On peut donc passer à la limite, quand $n \to +\infty$, dans (4.4) et obtenir :

$$\int \alpha g dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

Enfin, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne $\int \alpha g dm = \alpha \int g dm$. On conclut la démonstration du lemme en faisant tendre α vers 1. ■

Remarque 4.6 Dans la démonstration précédente, on a besoin de $\alpha < 1$ pour pouvoir écrire $\alpha g(x) \leq f_n(x)$ pour $n \geq n_x$, avec $n_x \in \mathbb{N}$ pouvant dépendre de x. Un tel n_x pourrait ne pas exister en prenant $\alpha = 1$.

Le lemme suivant est une conséquence simple du lemme 4.5.

Lemme 4.7 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Soient deux suites* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}_+$ *convergeant simplement et en croissant vers* f. *On a alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm. \tag{4.5}$$

DÉMONSTRATION –
On applique le lemme 4.5 avec $g = g_p$, p fixé. On obtient $\int g_p dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm$. Puis, en passant à la limite quand $p \to +\infty$, on obtient :

$$\lim_{p\to+\infty} \int g_p dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

On obtient enfin (4.5) en changeant les rôles de f_n et g_p. ■

Le lemme 4.7 permet donc de définir l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ de la manière suivante :

Définition 4.8 (Intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré, et* $f \in \mathcal{M}_+$. *D'après la proposition sur la mesurabilité positive, il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ *telle que* $f_n \uparrow f$ *quand* $n \to +\infty$, *c'est-à-dire :*

- *Pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f_n(x) \to f(x)$, *quand* $n \to +\infty$,
- $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$, *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, *et tout* $n \in \mathbb{N}$.

On définit l'intégrale de f *en posant :*

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \quad (\in \overline{\mathbb{R}}_+).$$

On a aussi la caractérisation suivante, parfois bien utile, de l'intégrale d'une fonction mesurable positive à partir d'intégrales de fonctions étagées positives :

Lemme 4.9 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors*

$$\int f dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

DÉMONSTRATION – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.
La monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{E}_+$ donne que $\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f_n\}$ (voir la remarque 4.4). Comme $f_n \leq f$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int f_n dm = \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f_n\} \leq \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

La définition de $\int f dm$ donne alors :

$$\int f dm \leq \sup\{\int g dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\}.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, considérons une fonction $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \leq f$. Comme $f_n \uparrow f$, le lemme 4.5 donne

$$\int g\,dm \leq \lim_{n\to+\infty} \int f_n\,dm = \int f\,dm.$$

On a donc

$$\sup\{\int g\,dm, g \in \mathcal{E}_+, g \leq f\} \leq \int f\,dm.$$

■

Proposition 4.10 (Propriétés de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) *Soient f et $g \in \mathcal{M}_+$, α et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, alors :*

– *linéarité positive : $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}_+$, et $\int (\alpha f + \beta g)\,dm = \alpha \int f\,dm + \beta \int g\,dm$,*

– *monotonie : $f \geq g \Rightarrow \int f\,dm \geq \int g\,dm$.*

Démonstration – La linéarité positive se démontre de manière très simple à partir de la linéarité positive sur $\mathcal{E}_+$ (proposition 4.3). et de la définition 4.8.

La monotonie est une conséquence immédiate du lemme 4.9. ■

Remarque 4.11 (A propos de $(+\infty)\times 0\ldots$) Soient (E, T, m) un espace mesuré et $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. On note I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A. Cette fonction est définie de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par : $I_A(x) = +\infty$ si $x \in A$ et $I_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Cette fonction est souvent notée aussi $(+\infty)1_A$. Il est clair que $I_A \in \mathcal{M}_+$ et que I_A est la limite croissante de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ définie par $f_n = n1_A$. On en déduit, en utilisant la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int I_A\,dm = 0$.

Une conséquence de cette remarque est le lemme suivant :

Lemme 4.12 *Soit (E, T, m) un espace mesuré.*

1. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$. On note $f1_A \in \mathcal{M}_+$ la fonction définie par $f1_A(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $f1_A(x) = 0$ si $x \in A^c$. On définit $\int_A f\,dm$ par $\int f1_A\,dm$. On suppose que $m(A) = 0$. Alors, $\int_A f\,dm = 0$.*
2. *Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Alors, $\int f\,dm = \int g\,dm$.*
3. *Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f\,dm = 0$.*

Démonstration – 1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ et $A \in T$ tel que $m(A) = 0$. Soit I_A la fonction indicatrice de l'ensemble A (définie dans la remarque 4.11). On a évidemment $f1_A \leq I_A$ et donc, par monotonie, $\int f1_A\,dm = 0$.

2. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f1_{A^c} = g1_{A^c}$. On a donc $f1_{A^c}, g1_{A^c} \in \mathcal{M}_+$ et $\int f1_{A^c}\,dm = \int g1_{A^c}\,dm$. D'autre part, comme $\int f1_A\,dm = \int g1_A\,dm = 0$, on a aussi, par linéarité positive

$$\int f\,dm = \int f1_{A^c}\,dm + \int f1_A\,dm = \int f1_{A^c}\,dm$$

(et de même pour g). Donc,

$$\int f\,dm = \int g\,dm.$$

3. Soit $f \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = 0$ p.p.. Alors $\int f\,dm = \int 0\,dm = 0$. ■

Ce lemme nous permet d'étendre la définition de l'intégrale à certaines fonctions non mesurables :

Définition 4.13 (Intégrabilité sans mesurabilité) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* f *définie sur* A^c*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(resp.* $\overline{\mathbb{R}}_+$*), avec* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{A}) = 0$ *(on dit que* f *est définie p.p., car* f *n'est pas définie sur* A*).*

1. *f est m-mesurable (resp. m-mesurable positive) s'il existe* $g \in \mathcal{M}$ *(resp.* $g \in \mathcal{M}_+$*) t.q.* $f = g$ *p.p.. (c'est-à-dire qu'il existe* $\mathrm{B} \in \mathrm{T}$ *tel que* $m(\mathrm{B}) = 0$, $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$ *et* $f = g$ *sur* B^c*).*
2. *Soit* f *m-mesurable positive. On pose* $\int f dm = \int g dm$*, avec* $g \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f = g$ *p.p. (noter que cette intégrale ne dépend pas du choix de* g*, grâce au lemme 4.12).*

Remarque 4.14 Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. Il est facile de montrer les résultats suivants :

1. Soit f de E dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, $f \in \mathcal{E}_+$ si et seulement si $f \in \mathcal{M}_+$, $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im} f) < +\infty$.
2. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$ et f de A^c dans $\mathbb{R}$. Alors, f est m-mesurable si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ t.q. $f_n \to f$ p.p. (voir l'exercice 4.18).
3. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$ et f de A^c dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, f est m-mesurable positive si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

Le résultat suivant sera souvent utile par la suite. En particulier, les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev (voir la section 4.9) en découlent facilement.

Lemme 4.15 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $t \in \mathbb{R}_+^*$ *; alors :*

$$m(\{f \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \int f dm. \tag{4.6}$$

Démonstration – On définit $\mathrm{A}_t = \{f \geq t\} = \{x \in \mathrm{E}\,;\, f(x) \geq t\}$. On a $\mathrm{A}_t \in \mathrm{T}$ et $f \geq t 1_{\mathrm{A}_t}$. Par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit l'inégalité 4.6. ∎

4.3 Convergence monotone et lemme de Fatou

Théorème 4.16 (Convergence monotone (1)) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in \mathrm{E}$*. On pose, pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$*. Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f_n dm \to \int f dm$ *lorsque* $n \to +\infty$*.*

Démonstration –

Noter que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$, le fait que $\int f_n dm \to \int f dm$, lorsque $n \to +\infty$, est donné par la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$. La difficulté est donc ici de travailler avec $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ au lieu de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ converge simplement et en croissant vers f, la proposition 3.19 donne $f \in \mathcal{M}_+$. Puis, par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \leq \int f dm.$$

Il reste donc à montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n dm \geq \int f\, dm. \tag{4.7}$$

Pour montrer (4.7), on va construire une suite de fonctions $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q $g_p \uparrow f$, quand $p \to \infty$, et $g_p \leq f_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{M}_+$; il existe une suite de fonctions $(f_{n,p})_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+$ t.q. $f_{n,p} \uparrow f_n$ lorsque p tend vers $+\infty$. On définit alors :

$$g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p}$$

On note que :

1. $g_p \in \mathcal{E}_+$ car g_p est le sup d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}_+$ (donc g_p est mesurable, $\mathrm{Im}(g_p) \subset \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(g_p)) < \infty$, ce qui donne $g_p \in \mathcal{E}_+$).
2. $g_{p+1} \geq g_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, comme $f_{n,p+1} \geq f_{n,p}$ (pour tout n et p), on a
$$g_{p+1} = \sup\{f_{p+1,p+1}, \sup_{n\leq p} f_{n,p+1}\} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p+1} \geq \sup_{n\leq p} f_{n,p} = g_p.$$
On peut donc définir, pour $x \in E$, $g(x) = \lim_{p\to\infty} g_p(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ (car la suite $(g_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\overline{\mathbb{R}}_+$).
3. $g = f$. En effet, on remarque que $g_p \geq f_{n,p}$ si $n \leq p$. On fixe n et on fait tendre p vers l'infini, on obtient $g \geq f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant $n \to +\infty$ on en déduit $g \geq f$. D'autre part, on a $f_{n,p} \leq f_n \leq f$ pour tout n et tout p. On a donc $g_p \leq f$ pour tout p. En faisant $p \to \infty$ on en déduit $g \leq f$. On a bien montré que $f = g$.
4. $g_p \leq f_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, $f_{n,p} \leq f_n \leq f_p$ si $n \leq p$. On a donc $g_p = \sup_{n\leq p} f_{n,p} \leq f_p$.

Les points 1 à 3 ci-dessus donnent $(g_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+$ et $g_p \uparrow f$ quand $p \to \infty$. Donc, la définition de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm$.

Le point 4 donne (par monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$) $\int g_p dm \leq \int f_p dm$, on en déduit

$$\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int g_p dm \leq \lim_{p\to\infty} \int f_p dm.$$

Finalement, on obtient bien $\int f dm = \lim_{p\to\infty} \int f_p dm$. ■

On utilisera souvent une légère extension (facile) du théorème de convergence monotone, où l'on suppose seulement une convergence en croissant presque partout de la suite de fonctions :

Théorème 4.17 (Convergence Monotone (2)) *Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$. On suppose que $f_n \uparrow f$ p.p. (c'est-à-dire que il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n(x) \uparrow f(x)$ pour tout $x \in A^c$). La fonction f (définie p.p.) est alors m−mesurable positive (c'est-à-dire que il existe $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p.) et $\int f_n dm \to \int f dm$. On rappelle que, par définition (voir la définition 4.13), $\int f dm = \int g dm$ avec $g \in \mathcal{M}_+$ t.q. $f = g$ p.p..*

DÉMONSTRATION – Soit $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n \uparrow f$ sur A^c, quand $n \to +\infty$. On pose $g_n = f_n 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g_n(x) = f_n(x)$ si $x \in A^c$ et $g_n(x) = 0$ si $x \in A$). On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow g$ avec $g = f 1_{A^c}$ (c'est-à-dire $g(x) = f(x)$ si $x \in A^c$ et $g(x) = 0$ si $x \in A$). Comme $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p., on a donc f m−mesurable positive. Puis, le théorème 4.16 donne $\int g_n dm \to \int g dm$ quand $n \to +\infty$. D'autre part, on a $\int g_n dm = \int f_n dm$ (car $f_n = g_n$ p.p.) et $\int g dm = \int f dm$ (par définition de $\int f dm$), donc

$$\int f_n dm \to \int f dm.$$

■

Corollaire 4.18 (Séries à termes positifs ou nuls) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *; on pose, pour tout* $x \in E$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) (\in \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* $\int f dm = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n dm$.

DÉMONSTRATION – On applique le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$g_n = \sum_{p=0}^{n} f_p.$$

On a $g_n \in \mathcal{M}_+$ et $g_n \uparrow f$. Donc $f \in \mathcal{M}_+$ et

$$\sum_{p=0}^{n} \int f_p dm = \int g_n dm \to \int f dm.$$

■

Lemme 4.19 (Fatou) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$.
On pose, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} f_p(x)) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Alors $f \in \mathcal{M}_+$ *et*

$$\int f dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm).$$

DÉMONSTRATION – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n(x) = \inf_{p\geq n} f_p(x)$ (pour tout $x \in E$), de sorte que $g_n \in \mathcal{M}_+$ (cf. proposition 3.19) et $g_n \uparrow f$. Le théorème de convergence monotone (théorème 4.16) donne que $f \in \mathcal{M}_+$ et $\int g_n dm \to \int f dm$. Or, $g_n \leq f_p$ si $p \geq n$. On a donc $\int g_n dm \leq \int f_p dm$ si $p \geq n$ et donc (en fixant n) $\int g_n dm \leq \inf_{p\geq n} \int f_p dm$. On en déduit

$$\int f dm = \lim_{n\to+\infty} \int g_n dm \leq \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int f_p dm) = \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm.$$

■

Le lemme de Fatou est souvent utilisé avec des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ telles que la suite $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour presque tout $x \in E$. Il permet alors de montrer que la limite (au sens de la convergence p.p.) de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est intégrable (voir les paragraphes suivants). On utilise pour cela le corollaire (immédiat) suivant :

Corollaire 4.20 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_+$ *t.q.* $f_n(x) \to f(x)$*, pour presque tout* $x \in E$*, lorsque* $n \to +\infty$*. On suppose qu'il existe* $C \geq 0$ *tel que* $\int f_n dm \leq C$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Alors,* f *est* m*−mesurable positive et* $\int f dm \leq C$.

DÉMONSTRATION – Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$ et $f_n \to f$ p.p., on a bien f m-mesurable positive. On pose $g = \liminf_{n\to+\infty} f_n$ (c'est-à-dire $g(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$). On a donc $g \in \mathcal{M}_+$ et $f = g$ p.p. donc $\int f dm = \int g dm$ par définition de l'intégrale des fonctions m-mesurables (définition 4.13).

Le lemme de Fatou donne $\int f dm = \int g dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n dm$ et donc $\int f dm \leq \mathrm{C}$ car $\int f_n dm \leq \mathrm{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

4.4 Mesures et probabilités de densité

4.4.1 Définitions

A partir d'une mesure et d'une fonction mesurable positive, on peut définir une autre mesure de la manière suivante :

Définition 4.21 (Mesure de densité) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}_+$*. Pour* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$*, on rappelle que* $f 1_{\mathrm{A}}$ *est la fonction (de* E *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*) définie par* $f 1_{\mathrm{A}}(x) = f(x)$ *si* $x \in \mathrm{A}$ *et* $f 1_{\mathrm{A}}(x) = 0$ *si* $x \in \mathrm{A}^c$ *(cette fonction appartient à* $\mathcal{M}_+$*) et on définit* $\int_{\mathrm{A}} f dm$ *par* $\int f 1_{\mathrm{A}} dm$*.*

On définit alors $\mu : \mathrm{T} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *par :*

$$\mu(\mathrm{A}) = \int f 1_{\mathrm{A}} dm = \int_{\mathrm{A}} f dm, \quad \forall \mathrm{A} \in \mathrm{T}.$$

L'application μ *ainsi définie est une mesure sur* T *(ceci est démontré dans l'exercice 4.25), appelée mesure de densité* f *par rapport à* m*, et notée* $\mu = fm$*.*

Proposition 4.22 *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré,* $f \in \mathcal{M}_+$ *et* μ *la mesure de densité* f *par rapport à* m*. Alors, la mesure* μ *est absolument continue par rapport à la mesure* m*, c'est-à-dire que si* $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ *est tel que* $m(\mathrm{A}) = 0$*, alors* $\mu(\mathrm{A}) = 0$*.*

DÉMONSTRATION – Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ tel que $m(\mathrm{A}) = 0$. On a alors $f 1_{\mathrm{A}} = 0$ m-p.p. et donc $\mu(\mathrm{A}) = \int f 1_{\mathrm{A}} dm = 0$ d'après le lemme 4.12. ■

On déduit de cette proposition que la mesure de Dirac en 0, définie en (2.2), n'est pas une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (on peut montrer que ces deux mesures sont étrangères (voir définition 2.29 et proposition 2.30).
Notons que l'on peut aussi définir des mesures signées de densité, voir la définition 6.74.

4.4.2 Exemples de probabilités de densité

Définition 4.23 (Probabilité de densité) *Soit* p *une probabilité sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, on dit que* p *est une probabilité de densité (par rapport à Lebesgue) s'il existe* $f \in \mathcal{M}_+$ *t.q.* $\int f d\lambda = 1$ *et* $p(\mathrm{A}) = \int f 1_{\mathrm{A}} d\lambda = \int_{\mathrm{A}} f d\lambda$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Les lois de probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, données dans la proposition suivante seront souvent utilisées dans le calcul des probabilités. (On rappelle qu'une loi de probabilité est, par définition, une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Définition 4.24 (Quelques lois de densité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) *On donne ici trois exemples de lois de densité.*

1. *Loi uniforme, $\mathcal{U}(a,b)$ Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, la loi uniforme sur $[a,b]$ est la loi de densité $\frac{1}{b-a}1_{[a,b]}$: $p(\mathrm{A}) = \frac{1}{b-a}\int 1_{[a,b]}1_{\mathrm{A}}d\lambda$, $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*
2. *Loi exponentielle, $\mathcal{E}(\tau)$ Soit $\tau > 0$; la loi exponentielle est définie par la densité f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0, \\ \tau e^{-\tau x} & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

3. *Loi de Gauss, $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ Soit $(\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$; la loi de Gauss de paramètre (μ,σ) est définie par la densité f définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

4.5 L'espace $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables

Soit $f \in \mathcal{M}$, la proposition 3.23 donne que $|f|$, f^+, $f^- \in \mathcal{M}_+$ et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne

$$\int f^+ dm \leq \int |f| dm \text{ et } \int f^- dm \leq \int |f| dm.$$

Ceci va nous permette de définir l'espace $\mathcal{L}^1$ et l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ à partir de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ (définition 4.8 page 80).

Définition 4.25 (Espace $\mathcal{L}^1$ et intégrale de Lebesgue) *Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}$. On dit que f est intégrable (ou intégrable au sens de Lebesgue) si $\int |f| dm < +\infty$. Dans ce cas, on a aussi*

$$\int f^+ dm < +\infty \text{ et } \int f^- dm < +\infty.$$

On pose alors :

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \ \ (\in \mathbb{R}).$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (ou plus simplement $\mathcal{L}^1$) l'ensemble des fonctions intégrables.

Soit $f \in \mathcal{M}$, la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$ donne $\int |f| dm = \int f^+ dm + \int f^- dm$. On voit donc que $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$.

Proposition 4.26 (Propriétés de $\mathcal{L}^1$ et de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$)
Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. On a alors :

1. *$\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'application $f \mapsto \int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.*

3. Monotonie : soient f et $g \in \mathcal{L}^1$ telles que $f \leq g$; alors $\displaystyle\int f dm \leq \int g dm$.

4. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1$, $|\int f dm| \leq \int |f| dm$.

DÉMONSTRATION –

1. On sait déjà que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (proposition 3.19). Pour montrer que $\mathcal{L}^1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, il suffit de remarquer, en utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, que $\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm$ et $\int |f+g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int \alpha f dm = \alpha \int f dm. \tag{4.8}$$

Cas 1. Si $\alpha = 0$, (4.8) est bien vraie.

Cas 2. Si $\alpha > 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ et $(\alpha f)^- = \alpha f^-$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = \alpha(\int f^+ dm - \int f^- dm) = \alpha \int f dm$.

Cas 3. Si $\alpha < 0$, on remarque que $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$ et $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit $\int \alpha f dm = \int (\alpha f)^+ dm - \int (\alpha f)^- dm = (-\alpha)(\int f^- dm - \int f^+ dm) = \alpha \int f dm$.

(b) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$. On veut montrer que

$$\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm.$$

On utilise les deux décompositions de $f+g$: $f+g = (f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$. On en déduit $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. En utilisant la linéarité positive de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit

$$\int (f+g)^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int (f+g)^- dm + \int f^+ dm + \int g^+ dm.$$

On en déduit (noter que tous les termes de l'égalité précédente sont dans $\mathbb{R}_+$)

$$\int (f+g)^+ dm - \int (f+g)^- dm = \int f^+ dm - \int f^- dm + \int g^+ dm - \int g^- dm,$$

et donc $\int (f+g) dm = \int f dm + \int g dm$.

On a bien montré que l'application $f \mapsto \displaystyle\int f dm$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^1$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \leq g$. On remarque que $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, donc $f^+ + g^- \leq g^+ + f^-$. En utilisant la linéarité positive et la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{M}_+$, on en déduit que

$$\int f^+ dm + \int g^- dm \leq \int g^+ dm + \int f^- dm$$

et donc que

$$\int f dm = \int f^+ dm - \int f^- dm \leq \int g^+ dm - \int g^- dm = \int g dm.$$

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. On a $|\int f dm| = |\int f^+ dm - \int f^- dm| \leq \int f^+ dm + \int f^- dm = \int |f| dm$.

■

On peut définir sur $\mathcal{L}^1$ une semi–norme de la manière suivante :

Définition 4.27 (Semi-norme sur $\mathcal{L}^1$) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{L}^1$. *On pose :*

$$\|f\|_1 = \int |f| dm.$$

L'application de $\mathcal{L}^1$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *définie par* $f \mapsto \|f\|_1$ *est une semi–norme sur* $\mathcal{L}_1$.

On a bien $\|f\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout $f \in \mathcal{L}^1$. Le fait que $f \mapsto \|f\|_1$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$ découle alors de la partie 1 de la démonstration de la proposition 4.26, c'est-à-dire du fait que

$$\int |\alpha f| dm = |\alpha| \int |f| dm \text{ et } \int |f+g| dm \leq \int |f| dm + \int |g| dm,, \ \forall f, g \in \mathcal{M}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Par contre, $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1$ car $\|f\|_1 = 0$ n'entraîne pas $f = 0$ mais seulement $f = 0$ p.p., comme cela est démontré à la proposition suivante.

Proposition 4.28 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. *Alors* $\int f dm = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*

2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. *Alors* $\|f\|_1 = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *p.p..*

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f = g$ *p.p.. Alors* $\int f dm = \int g dm$.

DÉMONSTRATION –

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+$.
   (a) On suppose que $f = 0$ p.p.. On a alors $\int f dm = \int 0 dm = 0$. (ceci est donné par le troisième point du lemme 4.12.)
   (b) On suppose que $\int f dm = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le lemme 4.15 page 82 donne $\int f dm \geq \frac{1}{n} m(\{f \geq \frac{1}{n}\})$. On a donc

   $$m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0 \text{ et } m(\{f > 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} m(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0$$

   (on a utilisé ici la σ-sous additivité de m). Comme $\{f = 0\}^c = \{f > 0\}$, on en déduit $f = 0$ p.p..
2. Soit $f \in \mathcal{L}^1$. La propriété démontrée ci-dessus donne $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $|f| = 0$ p.p., et donc $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.
3. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On a

   $$|\int f dm - \int g dm| = |\int (f-g) dm| \leq \int |f-g| dm = 0$$

   (on a utilisé le quatrième point de la proposition 4.26 et $|f - g| = 0$ p.p.). Donc, $\int f dm = \int g dm$.

■

La dernière assertion de la proposition précédente nous permettra, dans la prochaine section, de définir l'intégrale sur un espace appelé L^1.

On conclut cette section par une proposition préliminaire au théorème de convergence dominée.

Proposition 4.29 *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$, $f \in \mathcal{M}$ *et* $g \in \mathcal{L}^1$ *t.q.* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ *p.p.. On a alors* $f \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - f\|_1 \to 0$, *quand* $n \to +\infty$ *et* $\int f_n dm \to \int f dm$, *quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$, Il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A^c$. Puis, comme $|f_n| \leq g$ p.p., il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in T$ tel que $m(B_n) = 0$ et $|f_n| \leq g$ sur B_n^c. On pose $C = A \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$. Par σ-sous additivité de m, on a aussi $m(C) = 0$. On pose alors $h_n = f_n 1_{C^c}$, $h = f 1_{C^c}$ $G = g 1_{C^c}$, de sorte que $h_n = f_n$ p.p., $h = f$ p.p. et $G = g$ p.p.. De plus les fonctions h_n, h et G sont toujours mesurables et donc $h_n \in \mathcal{L}^1$, $h \in \mathcal{M}$ et $G \in \mathcal{L}^1$.

Comme $|h_n(x)| \leq G(x)$ pour tout $x \in E$ (et pour tout $n \in \mathbb{N}$) et $h_n(x) \to h(x)$ pour tout $x \in E$. On a aussi $|h| \leq G$. Ceci montre que $h \in \mathcal{L}^1$ et donc que $f \in \mathcal{L}^1$.

On pose maintenant $F_n = 2G - |h_n - h|$. Comme $|h_n - h| \leq 2G$, on a $F_n \in \mathcal{M}_+$ et on peut donc appliquer le lemme de Fatou (lemme 4.19) à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\liminf_{n\to+\infty} F_n = 2G$, on obtient :

$$\int 2G dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \lim_{n\to+\infty} (\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm). \tag{4.9}$$

La linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ donne $\int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \int |h_n - h| dm$. Donc :

$$\inf_{p\geq n} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \sup_{p\geq n} \int |h_n - h| dm$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int (2G - |h_n - h|) dm = \int 2G dm - \limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm.$$

L'inégalité 4.9 devient alors (en remarquant que $\int 2G dm \in \mathbb{R}$) :

$$\limsup_{n\to+\infty} \int |h_n - h| dm \leq 0.$$

On a donc $\|h_n - h\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$ et, comme $h_n - h = f_n - f$ p.p., on en déduit $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et donc $\int f_n dm \to \int f dm$, quand $n \to +\infty$ (grâce au quatrième point de la proposition 4.26). ■

4.6 L'espace L^1

Dans toute cette section, on travaille avec un espace mesuré (E, T, m).

On définit maintenant une relation d'équivalence, l'égalité presque partout, notée $(= p.p.)$, sur $\mathcal{L}^1$ par :

$$f \ (= p.p.)\ g \text{ si } f = g \ \ p.p..$$

Définition 4.30 (L'espace L^1) *L'ensemble* $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation* $(= p.p.)$ *définie sur* $\mathcal{L}^1$, *i.e.* $L^1 = \mathcal{L}^1/(= p.p.)$.

Dans la suite, L^1 désigne $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $\mathcal{L}^1$ désigne $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

Remarque 4.31

1. Un élément de L^1 est donc une partie de $\mathcal{L}^1$.
2. Si $f \in \mathcal{L}^1$, on note $\tilde{f} = \{g \in \mathcal{L}^1 ; g = f \text{ p.p.}\}$. $\tilde{f}$ est donc un élément de L^1, c'est l'élément de L^1 auquel f appartient (on l'appelle la classe de f).

Définition 4.32 (Structure vectorielle sur L^1**)** *On munit* L^1 *d'une structure vectorielle (faisant de* L^1 *un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*)*

1. Soient $F \in L^1$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*. On choisit* $f \in F$ *et on pose* $\alpha F = \{g \in \mathcal{L}^1 \,;\, g = \alpha f$ *p.p.*$\}$.

2. Soient $F, G \in L^1$*. On choisit* $f \in F$*,* $g \in G$ *et on pose* $F + G = \{h \in \mathcal{L}^1 \,;\, h = f + g$ *p.p.*$\}$.

La définition précédente est bien cohérente. En effet αF (qui est la classe de αf) ne dépend pas du choix de f dans F car $f = f_1$ p.p. implique $\alpha f = \alpha f_1$ p.p.. De même $F + G$ (qui est la classe de $f + g$) ne dépend pas du choix de f dans F et du choix de g dans G car $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p. implique $f + g = f_1 + g_1$ p.p..

Définition 4.33 (Intégrale sur L^1**)** *Soit* $F \in L^1$ *et* $f \in F$ *(on dit que* f *est un représentant de la classe* F*, noter que* $f \in \mathcal{L}^1$*). On pose :*

$$\int F dm = \int f dm.$$

Ici aussi cette définition est bien cohérente car $\int F dm$ ne dépend pas du choix de f dans F, grâce au troisième point de la proposition 4.28. Le troisième point de la proposition 4.28 nous donne aussi $\|f\|_1 = \|g\|_1$ si $f, g \in \mathcal{L}^1$ et $f = g$ p.p.. Ceci nous permet de définir une norme sur L^1 :

Définition 4.34 (Norme sur L^1**)** *Soit* $F \in L^1$*. On choisit* $f \in F$ *et on pose* $\|F\|_1 = \|f\|_1$.

Proposition 4.35 *L'application* $F \mapsto \|F\|_1$ *est une norme sur* L^1*. L'espace* L^1 *muni de la norme* $\|\cdot\|_1$ *est donc un espace vectoriel normé.*

DÉMONSTRATION – Il est facile de vérifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $\mathbb{R}$ (sachant que c'est déjà une semi–norme sur $\mathcal{L}^1$). Le seul point délicat est de remarquer que $\|F\|_1 = 0$ implique que $F = 0$ (0 est ici l'élément neutre de L^1, c'est-à-dire $\{h \in \mathcal{L}^1 \,;\, h = 0$ p.p.$\}$). Ceci découle du premier point de la proposition 4.28. ■

Notation : Soit $F \in L^1$ et $A \in T$, on notera $F1_A$ la classe de $f 1_A$ si $f \in F$ et on a donc $F1_A \in L^1$. Cette définition est cohérente car la classe de $f 1_A$ ne dépend pas du choix de f dans F. On notera alors, comme cela a été fait dans $\mathcal{M}_+$ (voir le lemme 4.12),

$$\int_A F dm = \int F1_A dm.$$

On montrera plus loin que L^1 est complet, c'est donc un espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire un espace de Banach, voir le théorème 4.48 page 95.

On rappelle que si $f \in \mathcal{L}^1$, $F \in L^1$ et que $f \in F$, on dit que f est un représentant de F. On introduit maintenant plusieurs notions de convergence dans L^1. Il est facile de vérifier que ces définitions sont cohérentes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des représentants choisis pour les éléments de L^1.

La notion de convergence simple n'a pas de sens dans L^1, mais la notion de convergence p.p., vue précédemment, se généralise aux éléments de L^1 ainsi que la notion de convergence en mesure.

Définition 4.36 (Convergence p.p., en mesure et dans L^1) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré.*

1. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *p.p. quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$, *avec* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.
2. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *en mesure quand* $n \to +\infty$ *si* $f_n \to f$ *en mesure, quand* $n \to +\infty$, *avec* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.
3. *Soient* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $F \in L^1$. *On dit que* $F_n \to F$ *dans* L^1 *quand* $n \to +\infty$ *si* $\|F_n - F\|_1 \to 0$ *quand* $n \to +\infty$. *(Ici aussi, noter que* $\|F_n - F\|_1 = \|f_n - f\|_1$ *si* $f_n \in F_n$ *et* $f \in F$.*)*
4. *Soient* $F, G \in L^1$. *On dit que* $F \geq G$ *p.p. si* $f \geq g$ *p.p. avec* $f \in F$ *et* $g \in G$.

On peut démontrer (s'inspirer de la démonstration du théorème 4.49 et voir les exercices du chapitre 3) que si une suite de fonctions de L^1 converge en mesure, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge presque partout. Dans le cas où la mesure m est finie, la convergence presque partout entraîne la convergence en mesure.

Remarque 4.37 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $F, G \in L^1$. $F = G$ est donc équivalent à $f = g$ p.p. si $f \in F$ et $g \in G$. En général, on écrira plutôt $F = G$ p.p. au lieu de $F = G$ (voir la remarque 4.40).

Remarque 4.38 Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soient $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ (ou $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$). On utilisera souvent la notation (légèrement incorrecte), "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$". Cette notation signifie "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" en choisissant $f_n \in F_n$. Ceci est cohérent car le fait que "$f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" ne dépend pas du choix de f_n dans F_n (voir aussi la remarque 4.40).

En fait, on écrira même souvent "$F_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$" (pour une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$) sans préciser les espaces de départ et d'arrivée pour f. A vrai dire, en choisissant $f_n \in F_n$, f est au moins définie p.p. sur E et le changement du choix de f_n dans F_n ne change f que sur un ensemble de mesure nulle. D'autre part, en l'absence de précision, f sera supposée être à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.39 (Propriétés de l'intégrale sur L^1) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. On a alors :*

1. *Soit* $F \in L^1$. *Alors* $|\int F dm| \leq \|F\|_1$.
2. *<u>Linéarité</u> :* $F \mapsto \int F dm$ *est une application linéaire continue de* L^1 *dans* $\mathbb{R}$.
3. *<u>Monotonie</u> : Soient* $F, G \in L^1$ *t.q.* $F \geq G$ *p.p., alors* $\int F dm \geq \int G dm$.

DÉMONSTRATION – 1. Soit $F \in L^1$ et $f \in F$, on a $|\int F dm| = |\int f dm| \leq \|f\|_1 = \|F\|_1$.

2. La linéarité de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26). La continuité est donné par le premier point ci-dessus.
3. La monotonie de l'intégrale sur L^1 découle immédiatement de la monotonie de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1$ (proposition 4.26).

■

Remarque 4.40 soit (E, T, m) un espace mesuré.

1. On confondra dans la suite un élément F de L^1 avec un représentant f de F, c'est-à-dire avec un élément $f \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f \in F$.
2. De manière plus générale, soit $A \subset E$ tel que A^c soit négligeable (c'est-à-dire $A^c \subset B$ avec $B \in T$ et $m(B) = 0$) et soit $f : A \to \mathbb{R}$ (la fonction f est donc définie p.p.). On dira que f est un élément de L^1 s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p.. On confond donc, en fait, la fonction f avec la classe d'équivalence de g, c'est-à-dire avec $\tilde{g} = \{h \in \mathcal{L}^1 ; h = g \text{ p.p.}\}$. D'ailleurs, cet ensemble est aussi égal à $\{h \in \mathcal{L}^1 ; h = f \text{ p.p.}\}$. En confondant ainsi f et $\tilde{g}$ on a donc $\int f dm = \int g dm$. Noter également que f est m-mesurable (voir la définition 4.13 page 82).

3. Avec la confusion décrite ci-dessus, si f et g sont des éléments de L^1, $f = g$ signifie en fait $f = g$ p.p..

Remarque 4.41 Soit (E, T, m) un espace mesuré et $(E, \overline{T}, \overline{m})$ son complété (cf définition 2.26 et exercice 2.26). L'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ est "identique" à l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, il existe une bijection évidente entre ces deux espaces en remarquant que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, alors il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. (voir à ce propos l'exercice 4.11).

Pour montrer qu'une fonction est dans L^1 on utilise souvent le lemme de Fatou de la manière suivante (c'est en fait une conséquence facile du lemme de Fatou pour les fonctions mesurables positives, cf lemme 4.19) :

Lemme 4.42 (Utilisation de Fatou) *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *On suppose que :*
1. $f_n \geq 0$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\exists C, \int f_n dm \leq C, \forall n \in \mathbb{N}$,
3. $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to \infty$,
alors $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\int |f| dm \leq C$.

On peut également montrer qu'une fonction est dans L^1 en utilisant le théorème de convergence monotone. Ceci est précisé dans le théorème 4.43 (dit théorème de Beppo-Lévi) (qui donne aussi un résultat de convergence dans L^1).

4.7 Théorèmes de convergence dans L^1

Nous connaissons à présent trois notions de convergence pour les fonctions de L^1, les notions de convergence presque partout, convergence en mesure et la notion de convergence habituelle dans un espace normé, c'est-à-dire ici la convergence pour la norme L^1. On peut montrer par des contre-exemples que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, et que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout. Pour montrer que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence L^1, on peut considérer l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1(\mathbb{R})$ définie par : $f_n(x) = n 1_{]0,\frac{1}{n}]}$. On a évidemment $f_n \to 0 \;\; pp$, alors que $\|f_n\|_1 = 1$. Pour montrer que la convergence L^1 n'entraîne pas la convergence presque partout, on considère à nouveau l'espace mesuré $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, et on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset L^1(\mathbb{R})$ (dite "bosse glissante", voir figure 4.7) définie par : $f_{n+k}(x) = 1_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]}$, pour $n = \frac{p(p-1)}{2}$, $p \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. On peut voir facilement que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{p}$ pour $n \in [\frac{p(p-1)}{2}, \frac{p(p+1)}{2}[$, alors que $f_n \not\to 0 \;\; pp$ (par contre, on peut noter qu'il est possible d'extraire de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge presque partout vers 0). Le théorème de convergence dominée, énoncé ci-après, donne une hypothèse suffisante pour qu'une suite (de fonctions) convergeant presque partout converge aussi dans L^1.

On rappelle (voir la remarque 4.38) que l'hypothèse "$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $F_n \to f$ p.p." signifie simplement que $f_n \to f$ p.p. en choisissant $f_n \in F_n$. Cette définition est bien cohérente car elle ne dépend pas du choix des f_n dans F_n. On rappelle aussi que $f_n \to f$ p.p. signifie qu'il existe $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in A^c$.

4.7.1 Convergence presque partout et convergence dans L^1

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de convergence monotone et permet de montrer la convergence dans L^1 d'une suite monotone de fonctions convergeant presque partout.

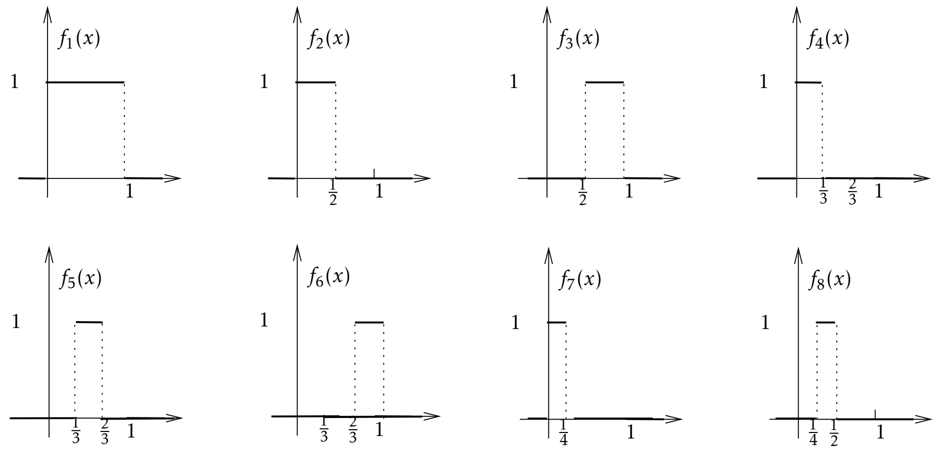

FIGURE 4.1 – La bosse glissante

Théorème 4.43 (Beppo–Lévi) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*. On suppose que :*

1. $f_{n+1} \geq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, [ou* $f_{n+1} \leq f_n$ *p.p.,* $\forall n \in \mathbb{N}$*],*

2. $f_n \to f$ *p.p., quand* $n \to +\infty$*.*

On a alors :

1. $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm \in \mathbb{R}.$$

2. Si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*, alors* $f_n \to f$ *dans* L^1.

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.31.
Nous allons maintenant voir un résultat fondamental, conséquence du lemme de Fatou, qui permet de prouver la convergence de suites dans L^1 sans hypothèse de convergence monotone.

Théorème 4.44 (Convergence dominée) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est noté* L^1 *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* f *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. $f_n \to f$ *p.p.*

2. $\exists \mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \mathrm{F}$ *p.p..*

Alors $f \in \mathrm{L}^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* L^1*, c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \textit{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\int f_n dm \to \int f dm$, *lorsque* $n \to +\infty$.

Démonstration – Ce théorème est essentiellement donné par la proposition 4.29. La différence avec la proposition 4.29 tient dans le fait que f_n et F sont dans L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$ et que f n'est pas nécessairement mesurable. Il s'agit toutefois de différences mineures comme nous le voyons ci après.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit un représentant de f_n, encore noté f_n. La première hypothèse du théorème signifie que $f_n \to f$ p.p. (voir la remarque 4.38). Il existe donc $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f_n(x) \to f(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in \mathrm{A}^c$. On remplace alors f_n par $f_n 1_{\mathrm{A}^c}$, encore noté f_n (c'est toujours un représentant de la même classe d'équivalence car $m(\mathrm{A}) = 0$). On définit aussi g par $g = f$ sur A^c et $g = 0$ sur A. Enfin, on choisit un représentant de F, encore noté F. On obtient ainsi :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$,
2. $f_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, quand $n \to +\infty$,
3. $\mathrm{F} \in \mathcal{L}^1$ et $f_n \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les 2 premiers items donnent aussi $g \in \mathcal{M}$ (par la proposition 3.19, on utilise ici le fait que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et pas seulement pour presque tout x). On peut donc appliquer la proposition 4.29 page 88. Elle donne : $g \in \mathcal{L}^1$, $\|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$ et $\int f_n dm \to \int g dm$, quand $n \to +\infty$.

Comme $g = f$ p.p., on a donc $f \in \mathrm{L}^1$ (au sens où il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ t.q. $f = g$ p.p.). Puis $\|f_n - f\|_1 = \|f_n - g\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, et $\int f_n dm \to \int g dm = \int f dm$, quand $n \to +\infty$. ∎

Dans le théorème 4.44, l'hypothèse de convergence p.p. de f_n vers f peut être remplacée par une hypothèse de convergence en mesure (plus précisément, avec l'hypothèse de domination donnée dans le théorème 4.44, on a même équivalence entre la convergence en mesure et la convergence dans L^1). On obtient ainsi le théorème suivant (ou seule la partie utile de cette équivalence est donnée).

Théorème 4.45 (Convergence en mesure dominée) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est noté* L^1 *. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ *et* f *une fonction de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

1. $f_n \to f$ *en mesure.*

2. $\exists \mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ *t.q., pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le \mathrm{F}$ *p.p..*

Alors $f \in \mathrm{L}^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $f_n \to f$ *dans* L^1*, c'est-à-dire*

$$\int |f_n - f| dm \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Ceci donne aussi $\int f_n dm \to \int f dm$, *lorsque* $n \to +\infty$.

Démonstration – En choisissant des représentants de f_n et f, la démonstration de ce théorème se ramène à celle de l'exercice 4.35. ∎

4.7.2 Série absolument convergente

On va maintenant montrer que l'espace $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach, en montrant que toute série absolument convergente dans L^1 (*i.e.* t.q. la série des normes converge) est convergente dans L^1. On en déduira aussi un résultat très important (le théorème 4.49) qui permet d'extraire d'une suite convergeant dans L^1 une sous-suite convergeant presque partout. On aura besoin au cours de la démonstration du petit résultat (démontré dans l'exercice 4.11) suivant :

Lemme 4.46 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $F \in \mathcal{M}_+$. *On suppose que* $\int F dm < +\infty$. *Alors* $F < +\infty$ *p.p. (c'est-à-dire que il existe* $A \in T$ *t.q.* $m(A) = 0$ *et* $F(x) < +\infty$ *pour tout* $x \in A^c$*).*

Théorème 4.47 (Séries absolument convergentes dans L^1) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *t.q.* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty$ *; alors :*

1. $\exists F \in L^1$ *;* $|\sum_{p=0}^n f_p| \leq F$ *p.p., pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *La série de terme général* $f_n(x)$ *est, pour presque tout* $x \in E$, *convergente (dans* $\mathbb{R}$*).*
   On définit f *par* $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *(de sorte que* f *est définie p.p.).*
3. $f \in L^1$ *(au sens où il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.) et* $\sum_{p=0}^n f_p \to f$ *dans* L^1 *et p.p., quand* $n \to +\infty$.

DÉMONSTRATION – La preuve s'effectue en trois étapes :

1. On choisit un représentant de f_n, encore noté f_n, et on pose $F(x) = \sum_{p\in\mathbb{N}} |f_p(x)| \in \overline{\mathbb{R}}_+$. On a donc $F \in \mathcal{M}_+$ et le corollaire 4.18 du théorème de convergence monotone donne
$$\int F dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_1 < +\infty.$$
Le lemme 4.46 donne alors $F < +\infty$ p.p., c'est-à-dire il existe $A \in T$ tel que $m(A) = 0$ et $F(x) < +\infty$ pour tout $x \in A^c$.
En remplaçant F par 0 sur A, on a donc $F \in \mathcal{L}^1$. (Donc, $F \in L^1$ au sens de la remarque 4.40).
La définition de F donne immédiatement $|\sum_{p=0}^n f_p| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $x \in A^c$, la série de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente dans $\mathbb{R}$, donc convergente. Comme $m(A) = 0$, f est donc définie p.p. car elle est définie pour $x \in A^c$ par $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^n f_p(x)$.
3. On pose $s_n = \sum_{p=0}^n f_p$. le premier point donne $|s_n| \leq F$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^1$. Le deuxième point donne $s_n \to f$ p.p.. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44). Il donne $f \in L^1$ et la convergence de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (vers f) dans L^1. La convergence p.p. (vers f) de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par le deuxième point. ■

Théorème 4.48 (Riesz–Fisher) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. L'espace* $L^1(E, T, m)$ *est un espace de Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.*

DÉMONSTRATION – On sait déjà que L^1 est espace vectoriel normé. Une conséquence du théorème 4.47 est que, dans L^1, toute série absolument convergente est convergente. Cette propriété est une caractérisation du fait qu'un espace vectoriel normé est complet. On en déduit donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est complet et donc que $(L^1, \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

■

Dans la suite L^1 sera toujours muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Théorème 4.49 (Réciproque partielle du théorème de convergence dominée)
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ *et* $f \in L^1$ *telles que* $f_n \to f$ *dans* L^1, *alors il existe une sous-suite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *et* $F \in L^1$ *telles que :*

1. $f_{n_k} \to f$ *p.p.,*
2. $|f_{n_k}| \leq F$ *p.p., pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

DÉMONSTRATION – En utilisant le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^1, on construit par récurrence une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $n_{k+1} > n_k$ et si $p,q \geq n_k$, $\|f_p - f_q\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$. On peut alors appliquer le théorème 4.47 à la série de terme général $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ pour conclure. ■

On donne maintenant le théorème de Vitali, qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de convergence dans L^1 pour une suite convergeant p.p.. La démonstration de ce théorème ainsi que des petits résultats préliminaires qu'elle nécessite font l'objet des exercices 4.32 et 4.33.

Proposition 4.50 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *; alors :*

1. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ *t.q.* $\forall A \in T, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon$.
2. $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et* $\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$.

Théorème 4.51 (Vitali) *Soit* (E, T, m) *un espace mesuré. On note* L^1 *l'espace* $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* L^1 *t.q.* $f_n \to f$ *p.p.,* f *prenant ses valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(voir remarque 4.38). Alors,* $f \in L^1$ *et* $f_n \to f$ *dans* L^1 *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *(Équi-intégrabilité) Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *t.q.*

$$A \in T,\ n \in \mathbb{N}, m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon,$$

2. *(Équi-petitesse à l'infini) pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $C \in T$ *t.q.* $m(C) < +\infty$ *et*

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 4.33 ; elle ne nécessite pas le théorème de convergence dominée : on utilise le théorème d'Egorov (cf théorème 3.39 et exercice 3.27). Le théorème de convergence dominée peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali (cf exercice 4.33). ■

Dans le théorème 4.51, si $m(E) < +\infty$, l'hypothèse d'equi-petitesse à l'infini est, bien sûr, toujours vérifiée (il suffit de prendre $C = E$).

4.8 Continuité et dérivabilité sous le signe d'intégration

Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on définit l'application $f(.,t)$: $E \to \mathbb{R}$, qui à x associe $f(x,t)$. On suppose que l'application $f(.,t)$ ainsi définie vérifie l'hypothèse suivante :

$$f(.,t) \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.10}$$

et on note F l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int f(.,t) dm = \int f(x,t) dm(x).$$

Théorème 4.52 (Continuité sous $\int$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.10) et $t_0 \in \mathbb{R}$; on suppose de plus que :*

1. *l'application $f(x,.)$, définie pour presque tout $x \in E$ par : $t \mapsto f(x,t)$, est continue en t_0, pour presque tout $x \in E$;*
2. *$\exists\ \varepsilon > 0$ et $\exists\ G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ tels que $|f(.,t)| \leq G$ p.p., pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.*

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \int f(.,t) dm = \int f(x,t) dm(x)$, est continue en t_0.

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$. Soit f_n définie par $f_n(x) = f(x, t_n)$. Comme $f_n \to f(\cdot, t_0)$ p.p. et $|f_n| \leq G$ p.p.. On peut appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) à la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il donne $F(t_n) \to F(t_0)$ quand $n \to +\infty$. ■

Théorème 4.53 (Dérivabilité sous $\int$) *Soient (E, T, m) un espace mesuré, f une fonction de $E \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse (4.10) et $t_0 \in \mathbb{R}$. On suppose de plus qu'il existe $\varepsilon > 0$, $A \in T$ et $G \in L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $m(A) = 0$ et :*

1. *L'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$;*
2. *$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq G(x)$ pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ et pour tout $x \in A^c$.*

Alors F, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $F(t) = \int f(.,t) dm = \int f(x,t) dm(x)$, est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dm(x).$$

DÉMONSTRATION – Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f_n définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans L^1 et on peut lui appliquer le théorème de convergence dominée (théorème 4.44) car $f_n \to \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ p.p., quand $n \to +\infty$, et, si $x \in A^c$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n} \in]0,1[$ t.q. $f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \theta_{x,n} t_0 + (1 - \theta_{x,n}) t_n)$

(grâce au théorème des accroissements finis) et donc $|f_n| \leq G$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le théorème 4.44 donne alors $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) \in L^1$ et $\int f_n dm \to \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0) dm$. Ceci étant vrai pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, t.q. $t_n \to t_0$ lorsque $n \to +\infty$ et $t_n \neq t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit bien que F est dérivable en t_0 et :

$$F'(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dm(x).$$

. ■

4.9 Espérance et moments des variables aléatoires

Définition 4.54 (Espérance, moment, variance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle.*

.

1. *Si $X \geq 0$ (c'est-à-dire $X(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par $E(X) = \int X(\omega) dp(\omega)$.*
2. *Si $X \in L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ (c'est-à-dire $E(|X|) < +\infty$), on définit l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X par :*

$$E(X) = \int X(\omega) dp(\omega).$$

On définit la variance de X par $Var(X) = \sigma^2(X) = E((X - E(X))^2)$ (avec $\sigma(X) \geq 0$).

3. *Pour $r \in [1, +\infty[$, le moment d'ordre r de la variable aléatoire X est l'espérance de la variable aléatoire $|X|^r$.*

Définition 4.55 (Covariance) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. t.q. $E(X^2) < +\infty$ et $E(Y^2) < +\infty$. On définit la covariance de X et Y par : $cov(X, Y) = E((X - E(X)(Y - E(Y))$. (Remarquer que $(X - E(X)(Y - E(Y))$ est une v.a.r. intégrable car sa valeur absolue est majorée, par exemple, par $X^2 + Y^2 + E(X)^2 + E(Y)^2$ qui est intégrable.)*

On calcule rarement l'espérance d'une v.a. comme intégrale par rapport à la probabilité p ; en effet, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est souvent mal connu. Le théorème 4.58 montre qu'il suffit en fait de connaître la loi de la v.a. X pour calculer son espérance (ou, plus généralement, l'espérance d'une fonction de X). On se ramène ainsi au calcul d'une intégrale sur $\mathbb{R}$.
Les deux inégalités suivantes découlent immédiatement du lemme 4.15 :

Lemme 4.56 (Inégalité de Markov) *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle positive sur Ω et $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$. On suppose que $0 < E(X) < +\infty$. Alors :*

$$p(\{X \geq \lambda E(X)\}) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

DÉMONSTRATION – Il suffit, par exemple, d'appliquer le lemme 4.15 avec $f = X$ et $t = \lambda E(X)$. ■

Lemme 4.57 (Inégalité de Bienaymé Tchebychev) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω*, intégrable et t.q. sa variance vérifie* $0 < \sigma^2(\mathrm{X}) < +\infty$*, et* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*. Alors :*

$$\mathrm{P}(\{|\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})| \geq \lambda\sigma(\mathrm{X})\}) \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

DÉMONSTRATION – Appliquer le lemme 4.15 avec $f = |\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})|^2$ et $t = \lambda\sigma(\mathrm{X})$. ■

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle sur Ω. La loi de X, notée P_X est définie par $\mathrm{P}_\mathrm{X}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}^{-1}(\mathrm{A}))$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ceci est équivalent à dire que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a, avec $\varphi = 1_\mathrm{A}$:

$$\int_\Omega \varphi \circ \mathrm{X}(\omega) d\mathrm{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} \varphi(x) d\mathrm{P}_\mathrm{X}(x). \tag{4.11}$$

On rappelle que $\varphi \circ \mathrm{X}$ est souvent improprement noté $\varphi(\mathrm{X})$, ce qui s'explique par le fait $\varphi \circ \mathrm{X}(\omega) = \varphi(\mathrm{X}(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Le théorème 4.58 montre que cette égalité est vraie pour une large classe de fonctions boréliennes φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ (on rappelle que borélienne signifie mesurable quand les espaces sont munis de la tribu de Borel).

Théorème 4.58 (Loi image) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* X *une variable aléatoire réelle sur* Ω *et* P_X *la loi de la variable aléatoire* X*. On a alors :*

1. *L'égalité (4.11) est vraie pour toute fonction* φ *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *et toute fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
2. *Soit* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, la fonction* $\varphi \circ \mathrm{X}$ *appartient à* $\mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *si et seulement si* $\varphi \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P}_\mathrm{X})$*. De plus, si* $\varphi \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{P}_\mathrm{X})$*, L'égalité (4.11) est vraie.*

DÉMONSTRATION – On remarque que (4.11) est vraie pour tout $\varphi = 1_\mathrm{A}$, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (par définition de p_X). Par linéarité positive, (4.11) est encore vraie pour tout φ borélienne étagée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par convergence monotone, (4.11) est alors vraie pour tout φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Ceci donne la première partie du premier item. En utilisant la décomposition $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, on montre alors le deuxième item. Enfin, la deuxième partie du premier item vient du fait que φ est intégrable pour la probabilité p_X si φ est borélienne bornée. ■

Un produit de v.a.r. intégrables et indépendantes est une v.a.r. intégrable (ce qui est, bien sûr, faux sans l'hypothèse d'indépendance) et l'espérance de ce produit est égal au produit des espérances. Ce résultat plus général est donnée dans la proposition suivante.

Proposition 4.59 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *des v.a.r. indépendantes.*

1. *Soit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*. On a alors :*

$$\mathrm{E}(\prod_{i=1}^d \varphi_i(\mathrm{X}_i)) = \prod_{i=1}^d \mathrm{E}(\varphi_i(\mathrm{X}_i)). \tag{4.12}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

2. *Soit* $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ *des fonctions boréliennes de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. On suppose que* $\varphi_i(\mathrm{X}_i)$ *est intégrable pour tout* $i = 1, \ldots, d$*. La v.a.r.* $\prod_{i=1}^d \varphi_i(\mathrm{X}_i)$ *est intégrable et l'égalité (4.12) est vraie.*

3. Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ des fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'égalité (4.12) est vraie.

N.B. Si $X_1, \ldots, X_d$ sont des v.a.r., le fait que (4.12) soit vraie pour toute famille $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ de fonctions boréliennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est donc une condition nécessaire et suffisante pour les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ soient indépendantes.

DÉMONSTRATION – Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ sont des fonctions caractéristiques de boréliens de $\mathbb{R}$, l'égalité (4.12) est une conséquence immédiate de la définition de l'indépendance des X_i (Si $\varphi_i = 1_{A_i}$ avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $E(\varphi_i(X_i)) = P(\{X_i \in A_i\}) = P(X_i^{-1}(A_i))$). Par linéarité positive, on en déduit que (4.12) est vraie si les fonctions φ_i sont (boréliennes) étagées positives (c'est-à-dire $\varphi \in \mathcal{E}_+$). Puis, par convergence monotone, on en déduit le premier item de la proposition (car toute fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est limite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_+$).

Pour le deuxième item, on utilise (4.12) avec la fonction $x \mapsto |\varphi_i(x)|$ au lieu de la fonction φ_i (pour tout i). On montre ainsi que la v.a.r. $\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)$ est intégrable. Puis, on montre (4.12) par linéarité (utilisant $\varphi_i = \varphi_i^+ - \varphi_i^-$).

Le troisième item est conséquence immédiate du deuxième (car si X est une v.a.r. et φ est une fonction borélienne bornée, la v.a.r. $\varphi(X)$ est intégrable). ■

Une conséquence de la proposition 4.59 est que XY est intégrable et $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ si X, Y sont deux v.a.r. indépendantes et intégrables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$.

Pour montrer que des v.a.r. sont indépendantes, il est parfois utile de savoir qu'il suffit de montrer (4.12) lorsque les fonctions φ_i sont continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est l'objet de la proposition 4.61 qui se démontre à partir d'un résultat d'unicité (proposition 4.60) sur lequel nous reviendrons au chapitre 5. On note $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est à support compact s'il existe un compact K de $\mathbb{R}$ t.q. $\varphi = 0$ sur K^c) .

Proposition 4.60 *Soit m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

$$\int \varphi dm = \int \varphi d\mu \textit{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Alors, $m = \mu$.

DÉMONSTRATION – Puisque m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finies sur les compacts, on a bien $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ et $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. On pose maintenant $\mathcal{C} = \{]a, b[, \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}$ et on commence par montrer que $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\varphi_n \uparrow 1_{]a,b[}$. En effet, il suffit de construire φ_n, pour $n \geq 2/(b - a)$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } x \leq a, \\
&\varphi_n(x) = n(x - a) \text{ si } a < x < a + \tfrac{1}{n}, \\
&\varphi_n(x) = 1 \text{ si } a + \tfrac{1}{n} < x < b - \tfrac{1}{n}, \\
&\varphi_n(x) = -n(x - b) \text{ si } b - \tfrac{1}{n} \leq x \leq b \\
&\varphi_n(x) = 0 \text{ si } b \leq x.
\end{aligned}$$

Puis, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $\int \varphi_n dm = \int \varphi_n d\mu$, on obtient (par convergence monotone ou par convergence dominée) $m(]a, b[) = \mu(]a, b[)$.

On conclut enfin que $m = \mu$ en utilisant, par exemple, la proposition 2.31. ■

Proposition 4.61 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $d > 1$ et $X_1, \ldots, X_d$ des v.a.r. Ces v.a.r. sont indépendantes si et seulement si on a, pour tout famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,*

$$E(\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)), \tag{4.13}$$

(En convenant qu'un produit de termes est nul si l'un des termes est nul.)

DÉMONSTRATION – Le fait que la condition est nécessaire est une conséquence immédiate de la proposition 4.59 car une fonction continue à support compact est borélienne et bornée.

On montre maintenant que la condition est suffisante. On suppose donc que (4.13) est vraie pour toute famille $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\} \subset C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on veut montrer que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes, c'est-à-dire que pour tout $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i}(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E(1_{A_i}(X_i)). \tag{4.14}$$

On rappelle en effet que

$$E(1_{A_i}(X_i)) = P(X_i^{-1}(A_i)) \text{ et } E(\prod_{i=1}^{d} 1_{A_i} X_i)) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i^{-1}(A_i)).$$

Pour montrer (4.14), on introduit, pour tout $1 \le n \le d+1$, la propriété suivante :
P_n : (4.13) est vraie si $\varphi_i = 1_{A_i}$, avec $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pour $i < n$, et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $i \ge n$.

L'hypothèse de la proposition donne que P_1 est vraie. On suppose maintenant que P_n est vraie pour un $n \in \{1, \ldots, d\}$. Soit $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour $i < n$ (et $\varphi_i = 1_{A_i}$) et $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour $i > n$. Pour $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose, avec $\varphi_n = 1_{A_n}$:

$$m(A_n) = E(\textstyle\prod_{i=1}^{d} \varphi_i(X_i)),$$
$$\mu(A_n) = \textstyle\prod_{i=1}^{d} E(\varphi_i(X_i)).$$

Les applications m et μ sont des mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. La propriété P_n montre que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La proposition 4.60 montre alors que $m = \mu$ ce qui donne la propriété P_{n+1}. Par récurrence sur n, on montre ainsi que P_{d+1} est vraie, ce qui donne (4.14) et l'indépendance de $X_1, \ldots, X_d$. ■

4.10 Espace $L^1_{\mathbb{C}}(E, T, m)$ et espace $L^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$

Définition 4.62 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré et* $N > 1$ *(*$N \in \mathbb{N}$*).*

1. *Soit* $f : E \to \mathbb{R}^N$. *Pour* $x \in E$, *on pose* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_N(x))^t \in \mathbb{R}^N$. *La fonction* f *appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ *si* $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ *pour tout* $n \in \{1, \ldots, N\}$.
2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$, *on note*

$$\int f dm = (\int f_1 dm, \ldots, \int f_N dm)^t \in \mathbb{R}^N.$$

La caractérisation suivante de mesurabilité et intégrabilité est intéressante.

Proposition 4.63 *Soient* (E, T, m) *un espace mesuré,* $N > 1$ *et* $f : E \to \mathbb{R}^N$.
On note $f_1, \ldots, f_N$ *les composantes de* f.

1. f_n *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) pour tout* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *si et seulement si* f *est mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}^N$, *c'est-à-dire si et seulement si* $f^{-1}(A) \in E$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
2. *Si* f *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{R}^N$*). On munit* $\mathbb{R}^N$ *d'une norme, notée* $\|\cdot\|$. *Alors,* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^N}(E, T, m)$ *si et seulement si* $\int \|f\| dm < +\infty$ *(noter que* $\|f\| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $\mathrm{N} = 2$.

1. On suppose d'abord $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$. On veut montrer que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par $\{\mathrm{A} \times \mathrm{B},\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, il suffit de montrer que $f^{-1}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \in \mathrm{T}$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Soit donc $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On a $f^{-1}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = f_1^{-1}(\mathrm{A}) \cap f_2^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{T}$ car f_1 et f_2 sont mesurables. Donc $f^{-1}(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \in \mathrm{T}$. On a bien montré que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$

   Réciproquement, on suppose maintenant que f est mesurable de E dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $f_1^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{A} \times \mathbb{R})$. Or $\mathrm{A} \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, donc $f_1^{-1}(\mathrm{A}) = f^{-1}(\mathrm{A} \times \mathbb{R}) \in \mathrm{T}$, ce qui prouve que f_1 est mesurable. On prouve de manière semblable que f_2 est mesurable.
2. Soit f mesurable de E dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. On suppose que $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$. Comme $y \mapsto \|y\|$ est continue de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{R}$, l'application $\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ est mesurable de E dans $\mathbb{R}$ (comme composée d'applications mesurables). Comme cette application ne prend que des valeurs positives ou nulles, on a donc $\|f\| \in \mathcal{M}_+$.

   Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ sont équivalentes, on a donc $\int \|f\| dm < +\infty$ si et seulement si $\int \|f\|_1 dm < +\infty$, avec $\|f\|_1 = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} |f_n|$. Il est alors immédiat de remarquer que $\int \|f\|_1 dm < +\infty$ si et seulement $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ pour tout $n \in \{1, \ldots, \mathrm{N}\}$. On a donc :
$$\int \|f\| dm < +\infty \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m).$$

■

La définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est muni d'une norme, notée $\|\cdot\|$, il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int \|f\| dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer, comme dans le cas $\mathrm{N} = 1$, l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.". On rappelle que $f = g$ p.p. s'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{A}) = 0$ et $f = g$ sur A^c.

Définition 4.64 (Espace L^1) *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré.*

1. *L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est l'espace* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".*
2. *On munit* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *d'une norme notée* $\|\cdot\|$. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. *On pose* $\|\mathrm{F}\|_1 = \int \|f\| dm$, *où* $f \in \mathrm{F}$ *(cette définition est correcte car indépendante du choix de f dans* F*).*

Proposition 4.65 (L^1 est un espace de Banach) *Soient* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré et* $\mathrm{N} > 1$. *L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *est un espace de Banach (réel) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur* $\mathbb{R}$*) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.64).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du cas $\mathrm{N} = 1$. ■

Définition 4.66 *Soit* $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *un espace mesuré.*

1. *Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$. *On note* $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *les parties réelle et imaginaire de f. On a donc, pour* $x \in \mathrm{E}$, $f(x) = \mathfrak{Re}(f)(x) + i\,\mathfrak{Im}(f)(x)$, *avec* $\mathfrak{Re}(f)(x), \mathfrak{Im}(f)(x) \in \mathbb{R}$. *La fonction f appartient à* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ *si* $\mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.

2. *Si* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$, *on note*

$$\int f\,dm = \int \mathfrak{Re}(f)\,dm + i\int \mathfrak{Im}(f)\,dm \in \mathbb{C}.$$

Ici aussi, on a une caractérisation de mesurabilité et intégrabilité.

Proposition 4.67 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré et* f *une application de* $\mathrm{E} \to \mathbb{C}$.

1. $\mathfrak{Re}(f)$ *et* $\mathfrak{Im}(f)$ *sont mesurables (de* E *dans* $\mathbb{R}$*) si et seulement si* f *est mesurable de* E *dans* $\mathbb{C}$*, c'est-à-dire si et seulement* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathrm{E}$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$.
2. *Si* f *est mesurable (de* E *dans* $\mathbb{C}$*),* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *si et seulement si* $\int |f|\,dm < +\infty$ *(noter que* $|f| \in \mathcal{M}_+$*).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition se ramène facilement à la précédente démonstration (c'est-à-dire à la démonstration de la proposition 4.63) en utilisant l'application $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(z) = (x,y)^t$ si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, qui est une bijection continue, d'inverse continue. ■

Ici aussi, la définition de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ donne immédiatement que cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Il est aussi immédiat que l'application $f \mapsto \int |f|\,dm$ est une semi–norme sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$. Pour obtenir un espace vectoriel normé, on va considérer l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ quotienté par la relation "$f = g$ p.p.".

Définition 4.68 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré.*

1. *L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est l'espace* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *quotienté par la relation "*$f = g$ *p.p.".*
2. *Soit* $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$*. On pose* $\|\mathrm{F}\|_1 = \int |f|\,dm$*, où* $f \in \mathrm{F}$ *(cette définition est correcte car indépendante du choix de* f *dans* F*).*

Proposition 4.69 *Soit* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *un espace mesuré. L'espace* $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *est un espace de Banach (complexe) c'est-à-dire un espace vectoriel (sur* $\mathbb{C}$*) normé complet (avec la norme définie dans la définition 4.68).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition découle facilement du fait que $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ est un espace de Banach (réel). ■

4.11 Exercices

4.11.1 Intégrale des fonctions mesurables positives et espace $\mathcal{L}^1$

Exercice 4.1 (Sup de mesures) Soit (E,T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(\mathrm{A}) \geq m_n(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(\mathrm{A}) = \sup\{m_n(\mathrm{A}), n \in \mathbb{N}\}$ pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$.

1. (Lemme préliminaire) Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n,p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to +\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \text{ (dans } \overline{\mathbb{R}}_+\text{) quand } n \to +\infty.$$

. [On pourra utiliser le fait que

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} \le \sum_{p=0}^{\infty} a_p.]$$

2. Montrer que m est une mesure.
3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{E}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions étagées de E dans $\mathbb{R}_+$.) Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.
4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. (On rappelle que $\mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.)
   (a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.
   (b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ lorqsue $n \to +\infty$.
5. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\int f dm_n \to \int f dm$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.2 (Somme de mesures) Soient m_1 et m_2 deux mesures sur l'espace mesurable (E,T).

1. Montrer que $m = m_1 + m_2$ est une mesure.
2. Montrer qu'une application f mesurable de E dans $\mathbb{R}$ est intégrable pour la mesure m si et seulement si elle est intégrable pour les mesures m_1 et m_2. Si f est intégrable pour la mesure m, montrer que $\int f dm = \int f dm_1 + \int f dm_2$.
3. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de mesures (positives) sur (E,T) et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$. On pose, pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, $m(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n m_n(\mathrm{A})$. Montrer que m est une mesure sur T ; soit f une application mesurable de E dans $\mathbb{R}$ et intégrable pour la mesure m ; montrer que $\int f dm = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \int f dm_n$.

Exercice 4.3 (Intégrale pour la mesure de Dirac) Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0, définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. (cf exemple 2.20.) Soit $f \in \mathcal{M}_+$, calculer $\int f d\delta_0$.

Exercice 4.4 (Restrictions de la mesure de Lebesgue) Soit A et B deux boréliens de $\mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. On note λ_A [resp. λ_B] la restriction à $\mathcal{B}(\mathrm{A})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathrm{B})$] de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{B},\mathcal{B}(\mathrm{B}),\lambda_\mathrm{B})$. Montrer que $f_{|\mathrm{A}} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{A},\mathcal{B}(\mathrm{A}),\lambda_\mathrm{A})$ et que $\int f_{|\mathrm{A}} d\lambda_\mathrm{A} = \int f 1_\mathrm{A} d\lambda_\mathrm{B}$. [Considérer d'abord le cas $f \in \mathcal{E}_+$ puis $f \in \mathcal{M}_+$ et enfin $f \in \mathcal{L}^1$.]

Exercice 4.5 (Intégrale des fonctions continues) Soit $f \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et que

$$\int f d\lambda = \int_0^1 f(x)dx$$

(cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1). On rappelle que l'on note (un peu abusivement...) par λ la restriction à $\mathcal{B}([0,1])$ de la mesure de Lebesgue (aussi notée λ...) sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.
N.B. : Bien sûr, un résultat analogue est vrai en remplaçant $[0,1]$ par $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Exercice 4.6 (Fonctions continues et fonctions intégrables) Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}([0,1])$. Montrer que $\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$.

Exercice 4.7 (Intégrale d'une fonction continue non bornée) Soit $f \in \mathrm{C}(]0,1[,\mathbb{R})$ et F une primitive de f (on a donc $\mathrm{F} \in \mathrm{C}^1(]0,1[,\mathbb{R})$).
On pose $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$.

1. Montrer que f est borélienne c'est-à-dire mesurable quand on munit $]0,1[$ et $\mathbb{R}$ de leur tribu borélienne.
2. On suppose maintenant que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0,1[$ (on a donc $f \in \mathcal{M}_+$).
   (a) Montrer que $\lim_{x\to 1^-} \mathrm{F}(x)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et que $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x)$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.
   (b) On suppose dans cette question que $\lim_{x\to 1^-} \mathrm{F}(x) \in \mathbb{R}$ et que $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$. [On pourra utiliser les exercices 4.4 et 4.5.]
   (c) On suppose maintenant que $\lim_{x\to 1^-} \mathrm{F}(x) = +\infty$ ou que $\lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) = -\infty$. Montrer que $f \notin \mathcal{L}^1$ (on a donc $\int f d\lambda = +\infty$).

Exercice 4.8 ($f, g \in \mathcal{L}^1 \not\Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. [On pourra utiliser l'exercice 4.7.]

Exercice 4.9 (Majoration d'une fonction intégrable décroissante) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$ et positive décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

1. Montrer que f est borélienne (et donc borélienne positive).
2. On suppose que $\int f d\lambda < +\infty$. Montrer qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \leq \mathrm{C}/x$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on retire l'hypothèse de décroissance de f sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 4.10 (Caractérisation d'une fonction caractéristique) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On suppose que $0 \leq f \leq 1$ p.p. et que $\int f\, dm = \int f^2\, dm$. Montrer qu'il existe un ensemble mesurable fini A tel que $f = 1_{\mathrm{A}}$ p.p..

Exercice 4.11 (f positive intégrable implique f finie p.p.) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Montrer que si $\displaystyle\int f dm < +\infty$, alors $f < +\infty$ p.p..

Exercice 4.12 (Une caractérisation de l'intégrabilité) Soient $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré fini, u une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}, |u(x)| \geq n\}$ et $\mathrm{B}_n = \{x \in \mathrm{E}, n < |u(x)| \leq n+1\}$.

1. Montrer que :

$$\int |u| dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} m(\mathrm{A}_n) < +\infty.$$

2. Soit $p \in]1,+\infty[$, montrer que $|u|^p$ est une fonction mesurable et que :

$$\int |u|^p dm < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\, m(\mathrm{B}_n) < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^{p-1}\, m(\mathrm{A}_n) < +\infty.$$

Exercice 4.13 (Sur la convergence en mesure) Soit $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. Soit f et g deux fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f_n \to f$ en mesure et $g_n \to g$ en mesure, quand $n \to +\infty$.

1. On suppose, dans cette question, que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$k \geq k_1 \Rightarrow m(\{x \in \mathrm{E}\,; |g(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 et $k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. :

$$n \geq n_0,\ k \geq k_0 \Rightarrow m(\{x \in E\,;\, |f_n(x)| \geq k\}) \leq \varepsilon.$$

(c) Montrer que $fg \in \mathcal{M}$ et $f_n g_n \to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$. [On pourra remarquer que $f_n g_n - fg = f_n(g_n - g) + g(f_n - f)$.]

(d) En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $fg \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

2. En prenant $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, Donner un exemple pour lequel $f_n g_n \not\to fg$ en mesure, quand $n \to +\infty$ (pour cet exemple, on a donc $f \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ ou $g \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$).

Exercice 4.14 (Sur l'inégalité de Markov) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $a\, m(\{|f| > a\}) \leq \int_{\{|f|>a\}} |f|\, dm$.
2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $m(\{|f| > a\}) \leq (\int |f|\, dm)/a$. (Ceci est l'inégalité de Markov.)
3. Montrer que
$$\lim_{a \to \infty} a\, m(\{|f| > a\}) = 0. \tag{4.15}$$
4. Donner des exemples de fonctions non intégrables qui vérifient la propriété (4.15) dans les 2 cas suivants : $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $(E, T, m) = (]0, 1[, \mathcal{B}(]0, 1[), \lambda)$.

Exercice 4.15 (Sur la positivité presque partout.) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que :

$$f \geq 0 \text{ p.p.} \Longleftrightarrow \int_A f\, dm \geq 0 \text{ pour tout } A \in T.$$

Exercice 4.16 (Équi–intégrabilité et équi–petitesse à l'infini)
Soient (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall A \in T$, $m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon$. [Introduire $f_n = \inf(|f|, n)$.]
2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, C \in T$ t.q. :

$$\text{(i) } m(C) < +\infty, \qquad \text{(ii) } \int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon, \qquad \text{(iii) } \sup_C |f| < +\infty.$$

[Considérer $C_n = \{x \in E\,;\, \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$, et montrer que pour $n \geq n_0$ où n_0 est bien choisi, C_n vérifie (i), (ii) et (iii).]

Exercice 4.17 (Intégration par rapport à une mesure image) Cet exercice est une généralisation à un espace mesuré quelconque du théorème de la loi image (théorème 4.58) qui est restreint à un espace probabilisé. Soit (E, T, m) un espace mesuré, (F, S) un espace mesurable et f de E dans F. On suppose que f est mesurable, c'est-à-dire que $f^{-1}(B) \in T$ pour tout $B \in S$. Pour tout $B \in S$, on pose $\mu(B) = m(f^{-1}(B))$ (On note souvent $\mu = f_* m$).

1. Montrer que μ est une mesure sur S (on l'appelle *mesure image* de m par f).
2. μ est-elle finie (resp. σ-finie, diffuse) lorsque m est finie (resp. σ-finie, diffuse) ?

3. Montrer qu'une fonction Φ mesurable de F dans $\mathbb{R}$ est μ–intégrable si et seulement si $\Phi \circ f$ est m-intégrable et que dans ce cas

$$\int_E \Phi \circ f \, dm = \int_F \Phi \, d\mu. \tag{4.16}$$

Exercice 4.18 (m–mesurabilité) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $A \in T$ t.q. $m(A) = 0$ et f une application de A^c dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
il existe g mesurable de E dans $\mathbb{R}$ t.q. $f = g$ p.p. si et seulement s'il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions étagées, t.q. $f_n \to f$ p.p., quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.19 (Mesure complète, suite de l'exercice 2.33) On reprend les notations de l'exercice 2.33 page 52. On note donc $(E, \overline{T}, \overline{m})$ le complété de l'espace mesuré (E, T, m).
Montrer que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, \overline{T}, \overline{m})$, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f = g$ p.p. et que $\displaystyle\int f d\overline{m} = \int g dm$.

Exercice 4.20 (Petit lemme d'intégration) Soit (E, T, m) un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose (dans cette question) que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T, \; m(A_n) \to 0 \; \Rightarrow \int f 1_{A_n} dm \to 0. \tag{4.17}$$

2. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Donner un exemple pour lequel $f \in \mathcal{M}(E, T)$, $f \geq 0$ (de sorte que $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$) et (4.17) est faux.
3. On suppose (dans cette question) que $m(E) < \infty$ et que $f > 0$ (c'est-à-dire $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$). Montrer que

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T, \int f 1_{A_n} dm \to 0 \; \Rightarrow m(A_n) \to 0. \tag{4.18}$$

   [On pourra utiliser le fait que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A_n \subset \{f < \frac{1}{p}\} \cup \{x \in A_n; f(x) \geq \frac{1}{p}\}$.]
4. On prend (dans cette question) $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (de sorte que $m(E) = +\infty$). Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $f > 0$, alors (4.18) est faux. Donner un exemple de $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q. $f > 0$.

Exercice 4.21 (Fatou sans positivité) Soit (E, T, m) un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $h \in \mathcal{M}(E, T)$. (On rappelle que $\mathcal{M}(E, T)$ est l'ensemble des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$.)

1. On suppose que $f_n \to h$ p.p. quand $n \to +\infty$, $f_n \geq f$ p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$ t.q.
      i. $f_n = g_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = g$ p.p.,
      ii. $g_n(x) \to h(x)$, quand $n \to +\infty$, pour tout $x \in E$,
      iii. $g_n \geq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$.
2. (question plus difficile) On reprend les hypothèses de la question précédente sauf "$f_n \geq f$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$" que l'on remplace par l'hypothèse (plus faible) "il existe $D \in \mathbb{R}$ t.q. $\int f_n dm \geq D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$". Donner un exemple pour lequel $h \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. [Prendre $(E, T, m) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

Exercice 4.22 (Application du théorème de convergence monotone)
Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ (λ désigne donc ici la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}([0,1])$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{nx} f(x)$ appartient à $\mathcal{L}^1$.
   On suppose, dans la suite de l'exercice, que $f \geq 0$ p.p. et qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ t.q. que $\int e^{nx} f(x)\, d\lambda(x) \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $f = 0$ p.p.. [Appliquer le théorème de convergence monotone.]
3. On suppose de plus que f est continue. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 4.23 (Distance associée à la convergence en mesure) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini. On pose, pour f et g fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $f, g \in \mathcal{M}$) :

$$d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} dm.$$

1. Montrer que d est bien définie et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (c'est-à-dire que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ pour tout $f, g \in \mathcal{M}$) et que d est une semi–distance sur $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire que $d(f,g) = d(g,f)$, pour tout $f, g \in \mathcal{M}$, et que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$, pour tout $f, g, h \in \mathcal{M}$).
2. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ et $f \subset \mathcal{M}$. Montrer que f_n converge en mesure vers f lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} d(f_n, f) = 0$. [Il est probablement utile de considérer, pour $\varepsilon > 0$, les ensembles $\mathrm{A}_n = \{x \in \mathrm{E}; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.]

Exercice 4.24 (Lemme de Fatou et convergence en mesure)
Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables (de E dans $\mathbb{R}$) et f une fonction mesurable (de E dans $\mathbb{R}$). On suppose que f_n tend vers f en mesure quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Montrer qu'il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $m(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < 1/2^k$ pour tout $n \geq n_k$. En déduire qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (la fonction φ est donc strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) telle que

   $$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(\{|f_{\varphi(n)} - f| \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_{\varphi(n)}$, $\mathrm{A}_n = \{|g_n - f| \geq \varepsilon\}$, et $\mathrm{B}_n = \cup_{p=n}^{\infty} \mathrm{A}_p$.
   (b) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} m(\mathrm{B}_n) = 0$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{|f| \geq 2\varepsilon\} \cap \mathrm{A}_n^c \subset \{|f| \leq 2|g_n|\}$. En déduire que

   $$\int_{\mathrm{B}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq \int_{\mathrm{A}_n^c \cap \{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2 \int |g_n| dm. \tag{4.19}$$

2. On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| dm \leq \mathrm{M}$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que

   $$\int_{\{|f| \geq 2\varepsilon\}} |f| dm \leq 2\mathrm{M}. \tag{4.20}$$

   [On pourra noter que $\int |g_n| dm \leq \mathrm{M}$, utiliser (4.19) et faire tendre n vers $+\infty$.]

(b) Montrer que

$$\int |f| dm \leq 2\mathrm{M}. \tag{4.21}$$

[On pourra utiliser (4.20) avec $\varepsilon = 1/n$ et faire tendre n vers $+\infty$.]

(c) En modifiant légérement la technique utilisée à la première question, montrer que (4.21) reste vrai avec $\alpha\mathrm{M}$ au lieu de 2M dès que $\alpha > 1$.

En déduire que (4.21) reste vrai avec M au lieu de 2M.

NB. Une autre méthode pour démontrer (4.21) (avec M au lieu de 2M) consiste à remarquer qu'il existe une sous suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ p.p. (ceci est une conséquence de la convergence en mesure de f_n vers f, exercice 3.28). Il suffit alors d'appliquer le lemme de Fatou pour conclure.

4.11.2 L'espace L^1

Exercice 4.25 (Mesure de densité) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}_+$. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose $\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f dm$.

1. Montrer que μ est une mesure sur T.
2. Soit $g \in \mathcal{M}$. Montrer que $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, \mu)$ si et seulement si $fg \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ (on pose $fg(x) = 0$ si $f(x) = \infty$ et $g(x) = 0$). Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, \mu)$, $\int g d\mu = \int fg dm$.

Exercice 4.26 (Suite bornée convergeant dans L^1) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On suppose que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ et qu'il existe $\mathrm{C} \geq 0$ tel que $|f_n| \leq \mathrm{C}$ p.p. et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int |f_n - f|^2 dm \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.27 (Comparaison de convergence dans L^1) On considère ici l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue et, pour $a \in \mathbb{R}$, on note δ_a la mesure de Dirac en a. On pose $\mu = \delta_1 + \delta_2 + 3\lambda$ (noter que μ est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. On pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathrm{L}^1(\mu) = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathrm{L}^1(\mu)$, et calculer $a_n = \int f_n d\mu$.
2. A-t-on convergence simple, convergence uniforme, convergence en mesure, convergence dans $\mathrm{L}^1(\mu)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?.

Exercice 4.28 (Convergence uniforme et convergence des intégrales)
Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ $(= \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m))$; on suppose que f_n converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$ (plus précisément : il existe des représentants des f_n, encore notés f_n, t.q. f_n converge uniformément vers f).

1. A-t-on $f \in \mathrm{L}^1$ (plus précisément : existe-t-il $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ t.q. $f = g$ p.p. si $g \in \mathrm{F}$) ? [Distinguer les cas $m(\mathrm{E}) < +\infty$ et $m(\mathrm{E}) = +\infty$.]
2. Si $f \in \mathrm{L}^1$ et $(\int f_n dm)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$, a-t-on : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int f_n dm = \int f dm$?

Exercice 4.29 (Convergence dans L^1 de fonctions positives) Soit $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré. On note L^1 l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$ et $f \in \mathrm{L}^1$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \geq 0$ p.p., que $f_n \to f$ p.p. et que $\int f_n dm \to \int f dm$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $f_n \to f$ dans L^1. [On pourra examiner la suite $(f - f_n)^+$.]

Exercice 4.30 (Exemple de convergence)
On pose $(E, T, m) = ([-1, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = n1_{[\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n}]}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1 et que la suite $(\int f_n d\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée ?
3. A-t-on convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$?
4. Montrer que pour toute fonction φ continue de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\int f_n \varphi d\lambda \to \int \varphi d\delta_0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.31 (Théorème de Beppo-Lévi)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$, tels que

(i) $f_n \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, c'est-à-dire :
$f_{n+1} \geq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$,
ou
$f_{n+1} \leq f_n$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Construire $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1 (= \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $g \in \mathcal{M}$ t.q. $f_n = g_n$ p.p., $f = g$ p.p., $g_n(x) \to g(x)$ pour tout $x \in E$, et $g_{n+1} \geq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $g_{n+1} \leq g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).
2. Montrer que $f \in L^1 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int f_n dm \in \mathbb{R}$.
3. On suppose ici que $f \in L^1$, montrer que $f_n \to f$ dans L^1, lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 4.32 (Préliminaire pour le théorème de Vitali)
Soit (E, T, m) un espace mesuré et soit $f \in L^1$ $(= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :
$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| dm \leq \varepsilon.$$
[Choisir un représentant de f et introduire $f_n = \inf(|f|, n)$].
2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $C \in T$ t.q. $m(C) < +\infty$ et $\displaystyle\int_{C^c} |f| dm \leq \varepsilon$.
[Choisir un représentant de f et considérer $C_n = \{x \in E ; \dfrac{1}{n} \leq |f(x)|\}$.]

Exercice 4.33 (Théorème de Vitali)
Soient (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(E, T, m))$ et $f : E \to \mathbb{R}$ t.q. $f_n \to f$ p.p..

1. On suppose $m(E) < +\infty$. Montrer que $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi–intégrable *i.e.* : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ t.q. $(A \in T,\ n \in \mathbb{N},\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n| dm \leq \varepsilon)$.
[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser la question 1 de l'exercice 4.32. Pour le sens $\Leftarrow$, remarquer que $\int |f_n - f| dm = \int_A |f_n - f| dm + \int_{A^c} |f_n - f| dm$, utiliser le théorème d'Egorov et le lemme de Fatou...]
2. On suppose maintenant $m(E) = +\infty$. Montrer que : $f \in L^1$ et $f_n \to f$ dans L^1 lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable et vérifie : $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, C \in T,\ m(C) < +\infty$ et $\int_{C^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$ pour tout n.
[Pour montrer le sens $\Rightarrow$, utiliser l'exercice 4.32. Pour le sens $\Leftarrow$, utiliser l'exercice 4.32, le lemme de Fatou et le résultat de la question 1.]

3. Montrer que le théorème de convergence dominée de Lebesgue peut être vu comme une conséquence du théorème de Vitali.

Exercice 4.34 (Théorème de "Vitali-mesure") Soit (E, T, m) un espace mesuré. On note $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^1$ et $f \in \mathcal{M}(E, T)$.

1. On suppose que $m(E) < +\infty$. On se propose ici de montrer que $[f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty]$ si et seulement si on a les deux propriétés suivantes :

   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$,

   p2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

   (a) Montrer le sens direct (c'est-à-dire que la convergence pour la norme de L^1 implique p1 et p2).

   (b) Pour montrer la réciproque, on suppose maintenant que $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$, et que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

      i. Montrer que pour tout $\delta > 0$ et $\eta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. : $p, q \geq n \Rightarrow m(\{|f_p - f_q| \geq \eta\} \leq \delta$.

      ii. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans L^1.

      iii. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1$ et que $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2. On ne suppose plus que $m(E) < +\infty$. Montrer que "$f \in \mathcal{L}^1$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$ si et seulement si on a les propriétés suivantes :

   p1. $f_n \to f$ en mesure, quand $n \to +\infty$,

   p2. la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable,

   p3. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in T$ t.q. $m(A) < +\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{A^c} |f_n| dm \leq \varepsilon$.

Exercice 4.35 (Convergence en mesure dominée) Soit (E, T, m) un espace mesuré, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrales de E dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{R}$. On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :

- $f_n \to f$ en mesure quand $n \to +\infty$.
- Il existe g, fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ p.p..

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) \leq m(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{p}\}).$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $m(\{|f| - g \geq \frac{1}{p}\}) = 0$. En déduire que $|f| \leq g$ p.p. et que f est intégrable.

3. On suppose, dans cette question, que $m(E) < +\infty$.

   (a) Soit $\eta > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int |f_n - f| dm \leq \eta m(E) + \int_{\{|f_n - f| > \eta\}} 2g dm.$$

   (b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.

   [On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q.

$$A \in T,\ m(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |h| dm \leq \varepsilon.]$$

4. On ne suppose plus que $m(\mathrm{E}) < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f| dm = 0$.
[On rappelle que si, h est une fonction intégrable de E dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\mathrm{C} \in \mathrm{T}$ t.q. $m(\mathrm{C}) < +\infty$ et $\int_{\mathrm{C}^c} |h| dm \le \varepsilon$.]

Exercice 4.36 (Continuité de $p \mapsto \|\cdot\|_p$) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$.

1. Pour $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|f\|_p = \left(\int |f|^p dm\right)^{\frac{1}{p}}$ (noter que $|f|^p \in \mathcal{M}_+$) et on dit que $f \in \mathcal{L}^p$ si $\|f\|_p < +\infty$. On pose $\mathrm{I} = \{p \in [1, +\infty[, f \in \mathcal{L}^p\}$.
   (a) Soient p_1 et $p_2 \in [1, +\infty[$, et $p \in [p_1, p_2]$. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^{p_1} \cap \mathcal{L}^{p_2}$, alors $f \in \mathcal{L}^p$. En déduire que I est un intervalle.
   [On pourra introduire $\mathrm{A} = \{x; |f(x)| \le 1\}$.]
   (b) On montre sur des exemples que les bornes de I peuvent être ou ne pas être dans I. On prend pour cela : $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = ([2, +\infty[, \mathcal{B}([2, \infty[), \lambda)$ (λ est ici la restriction à $[2, \infty[$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Calculer I dans les deux cas suivants :
      i. $f(x) = \frac{1}{x}, x \in [2, +\infty[$.
      ii. $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}, x \in [2, +\infty[$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ et $p \in \bar{\mathrm{I}}$, ($\bar{\mathrm{I}}$ désigne l'adhérence de I dans $\mathbb{R}$), t.q. $p_n \uparrow p$ (ou $p_n \downarrow p$). Montrer que $\displaystyle\int |f|^{p_n} dm \to \int |f|^p dm$ quand $n \to +\infty$.
   [On pourra encore utiliser l'ensemble A.]
2. On dit que $f \in \mathcal{L}^\infty$ s'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $|f| < \mathrm{C}$ p.p.. On note $\|f\|_\infty = \inf\{\mathrm{C} \in \mathbb{R} \text{ t.q. } |f| < \mathrm{C} \text{ p.p.}\}$. Si $f \notin \mathcal{L}^\infty$, on pose $\|f\|_\infty = +\infty$.
   (a) Montrer que $f \le \|f\|_\infty$ p.p.. A-t-on $f < \|f\|_\infty$ p.p. ?
   On pose $\mathrm{J} = \{p \in [1, +\infty]; f \in \mathcal{L}^p\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$.
   (b) Remarquer que $\mathrm{J} = \mathrm{I}$ ou $\mathrm{J} = \mathrm{I} \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $p \in \mathrm{I}$ et $+\infty \in \mathrm{J}$, alors $[p, +\infty] \subset \mathrm{J}$. En déduire que J est un intervalle de $\overline{\mathbb{R}}_+$.
   (c) Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{I}$ t.q. $p_n \uparrow +\infty$. On suppose que $\|f\|_\infty > 0$ (noter que $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$).
      i. Soit $0 < c < \|f\|_\infty$. Montrer que $\liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \ge c$. [On pourra remarquer que $\int |f|^p dm \ge c^p m(\{x, |f(x)| \ge c\})$.]
      ii. On suppose que $\|f\|_\infty < +\infty$. Montrer que : $\limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{p_n} \le \|f\|_\infty$. [*On pourra considérer la suite* $g_n = \left(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}\right)^{p_n}$ *et noter que* $g_n \le g_0$ *p.p..*]
      iii. Déduire de (a) et (b) que $\|f\|_{p_n} \to \|f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
3. Déduire des deux parties précédentes que $p \to \|f\|_p$ est continue de $\bar{\mathrm{J}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, où $\bar{\mathrm{J}}$ désigne l'adhérence de J dans $\overline{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $\bar{\mathrm{J}} = [a, b]$ si $\mathrm{J} = |a, b|$, avec $1 \le a \le b \le +\infty$, et | désigne] ou [).

Exercice 4.37 (Exemple de continuité et dérivabilité sous le signe $\int$)
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t, x) = \mathrm{ch}(t/(1 + x)) - 1$.
1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t, .)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{F}(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x) dx$. Montrer que F est continue, dérivable. Donner une expression de F'.

Exercice 4.38 (Contre-exemple à la continuité sous le signe $\int$)
Soit f de $]-1,1[\times[0,1]$ dans $\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t,x) = 0$ si $t \in]-1,0]$, puis, pour $t \in]0,1[$, par

$$f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{4}{t^2}x \text{ si } x \in [0, \dfrac{t}{2}], \\ \dfrac{4}{t^2}(t-x) \text{ si } x \in]\dfrac{t}{2}, t], \\ 0 \text{ si } x \in]t,1]. \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $f(t,\cdot)$ est continue sur $[0,1]$ pour tout $t \in]-1,1[$.
   Pour $t \in]-1,1[$, on pose $\mathrm{F}(t) = \displaystyle\int_{]0,1[} f(t,\cdot)d\lambda = \int_0^1 f(t,x)dx$.
2. Montrer que $f(t,x) \to 0$ lorsque $t \to 0$, pour tout $x \in [0,1]$.
3. Montrer que $\mathrm{F}(t) \not\to \mathrm{F}(0)$ lorsque $t \to 0$, $t > 0$. Pourquoi ne peut on pas appliquer le théorème de continuité sous le signe $\int$?

Exercice 4.39 (Continuité d'une application de L^1 dans L^1) Soient $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ un espace mesuré fini et soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ t.q. :

$$\exists\, \mathrm{C} \in \mathbb{R}_+^*\,;\ |g(s)| \le \mathrm{C}|s| + \mathrm{C},\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.22}$$

1. Soit $u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Montrer que $g \circ u \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$.
   On pose $\mathrm{L}^1 = \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. Pour $u \in \mathrm{L}^1$, on pose $\mathrm{G}(u) = \{h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m);\ h = g \circ v \text{ p.p.}\} \in \mathrm{L}^1$, avec $v \in u$.
2. Montrer que la définition précédente a bien un sens, c'est-à-dire que $\mathrm{G}(u)$ ne dépend pas du choix de v dans u.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{L}^1$. On suppose que $u_n \to u$ p.p. et qu'il existe $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^1$ t.q. $|u_n| \le \mathrm{F}$ p.p., pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{G}(u_n) \to \mathrm{G}(u)$ dans L^1.
4. Montrer que G est continue de L^1 dans L^1.
   [On pourra utiliser la question 3. et le théorème appelé réciproque partielle de la convergence dominée.]

Exercice 4.40 (Paris groupés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace mesuré tel que $p(\Omega) = 1$. On se donne une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ déléments de $\mathcal{A}$ telle que $\mathrm{A}_{n+1} \subset (\cup_{p=1}^n \mathrm{A}_p)^c$ et $p(\mathrm{A}_n) = 1/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En prenant $(\Omega, \mathcal{A}, p) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $]0,1[$, donner un exemple d'une suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifant les hypothèses demandées.
   On se donne aussi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_+$ avec $\alpha_1 = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
   $$\mathrm{G}_n = (-\alpha_n - 1)1_{\mathrm{A}_n} + \alpha_{n+1}1_{\mathrm{A}_{n+1}}.$$
2. Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Avec ce choix de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{G}_i$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\int \mathrm{H}_n dp = n.$$
3. Pour $x \in \Omega$, on pose $\mathrm{H}(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{G}_n(x)$. Montrer que $\mathrm{H}(x)$ est bien défini pour tout $x \in \Omega$ et que $\mathrm{H} = -1$ p.p..
4. On choisit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $\int \mathrm{G}_n dp = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(\mathrm{H}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie à la question 2 ?

N.B. Cet exercice a une interprétation probabiliste un peu inattendue. Il permet de montrer que le fait de faire une infinité de paris favorables peut être défavorable.

4.11.3 Espérance et moments des variables aléatoires

Exercice 4.41 (Espérance et variance de lois usuelles) Soient (E,T) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle, de loi de probabilité p_X. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X dans les cas suivants :

1. p_X est la loi uniforme sur $[a,b]$ ($a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$) ;
2. p_X est la loi exponentielle ;
3. p_X est la loi de Gauss.

Exercice 4.42 (Inégalité de Jensen) Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe c_a t.q. $f(x) - f(a) \geq c_a(x-a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Démontrer l'**inégalité de Jensen** qui s'écrit

$$\int f(X)dP \geq f(\int XdP).$$

[Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

Exercice 4.43 (Sur l'équi-intégrabilité) Soit $(E,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. (réelles). On rappelle que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable si $\int_A |X_n| dP \to 0$, quand $P(A) \to 0$ (avec $A \in \mathcal{A}$), uniformément par rapport à $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. $\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| dP = 0$,
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |X_n| dP < +\infty$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équi-intégrable.

Exercice 4.44 (Caractérisation de l'indépendance) Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $n \geq 2$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles. Montrer que l'indépendance de $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ est équivalente à la propriété suivante :

$$\forall (a_1,\ldots,a_n) \in]-\infty,+\infty[^n, P[X_1 \leq a_1,\ldots,X_n \leq a_n] = \prod_{i=1}^{n} P[X_i \leq a_i]. \tag{4.23}$$

(La notation $P[X \leq a]$ est identique à $P(\{X \leq a\})$, elle désigne la probabilité de l'ensemble $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\}$.)

Exercice 4.45 (Sign(X) et |X| pour une gaussienne) On définit la fonction signe par :

$$\mathrm{sign} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}, \quad s \mapsto \mathrm{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0, \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et |X| sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

Exercice 4.46 (V.a. gaussiennes dépendantes) Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace probabilisé, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que :

$$X_1 \sim \mathcal{N}(0,\sigma_1^2) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{N}(0,\sigma_2^2).$$

(le signe "∼" signifie "a pour loi".) Construire deux v.a. Y_1 et Y_2 t.q. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$ et Y_1 et Y_2 soient dépendantes.

Exercice 4.47 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites, voir le Chapitre 7.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer que SX et X sont dépendantes.
3. Montrer que $\mathrm{Cov}(SX, X) = 0$.
4. (Question subsidiaire.) On ne suppose plus l'existence de S, mais on suppose qu'il existe Y v.a. gaussienne indépendante de X. Montrer que si $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, il est possible d'utiliser Y pour construire S, v.a. indépendante de X et telle que $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

Exercice 4.48 (Limite p.s. et indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to +\infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 4.49 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $Y = \exp(X)$. Calculer la moyenne, la variance et la densité de Y.

Exercice 4.50 (Loi du χ^2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a.r. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle loi du χ^2 à 1 degré de liberté.)

Exercice 4.51 (Conséquence du lemme de Borel-Cantelli) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de loi normale centrée réduite (c'est-à-dire que la loi de X_1 est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $P(|X_n| > x) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\exp(\frac{-x^2}{2})$.
2. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} = 1$ p.s..

Exercice 4.52 (Sur la somme de v.a.r.i.i.d. intégrables) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r.i.i.d. et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On pose $S_N = X_1 + \ldots + X_N$ (c'est-à-dire que, pour $\omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{\omega \in \Omega, N(w) = n\}$.

1. On suppose, dans cette question, que les v.a.r. $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \sum_{p=1}^{n} X_p$ et $Z_n = \sum_{p=1}^{n} |X_p|$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1_{A_n} et Y_n sont des v.a.r. indépendantes et que 1_{A_n} et Z_n sont des v.a.r. indépendantes. [On pourra utiliser la proposition 3.30.]
   (b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$. [On pourra remarquer que $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Y_n$ et $|S_N| \le \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} Z_n$.]
2. On suppose maintenant que $A_n \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (où $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$ est la tribu engendrée par $X_1, \ldots, X_n$).
   (a) Montrer que $1_{\{n \le N\}}$ et X_n sont des v.a.r. indépendantes.
   (b) On suppose que N et X_1 sont intégrables . Montrer que S_N est intégrable et calculer $E(S_N)$ en fonction de $E(N)$ et $E(X_1)$. [On pourra écrire $S_N = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{n \le N\}} X_n$.]

Exercice 4.53 (Dés pipés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes, bornées et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\mathrm{E}(t^{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}) = \mathrm{E}(t^{\mathrm{X}})\mathrm{E}(t^{\mathrm{Y}}).$$

2. On suppose maintenant que $\mathrm{Im}(\mathrm{X}) = \mathrm{Im}(\mathrm{Y}) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et que $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} = i\}) = p_i > 0$, $\mathrm{P}(\{\mathrm{Y} = i\}) = q_i > 0$ pour $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

   On pose $\mathrm{P}(\{\mathrm{X}+\mathrm{Y} = i\}) = r_i$ pour $i = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

   Montrer qu'il est impossible que r_i soit indépendant de i (c'est-à-dire $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12). [On pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12, on a alors $(1-t^{11}) = 11(1-t)(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1}t^i)(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1}t^i)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible. . .]

Chapitre 5

Intégrale sur les boréliens de $\mathbb{R}$

5.1 Intégrale de Lebesgue et intégrale des fonctions continues

Nous commençons par comparer l'intégrale de Lebesgue (définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$) à l'intégrale classique des fonctions continues (et plus généralement des fonctions réglées).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non). On rappelle que $\mathcal{B}(\mathrm{I}) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathrm{A} \subset \mathrm{I}\}$. On peut donc considérer la restriction à $\mathcal{B}(\mathrm{I})$ de la mesure de Lebesgue définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On notera en général (un peu incorrectement) aussi λ cette mesure sur $\mathcal{B}(\mathrm{I})$.

Proposition 5.1

Soit $-\infty < a < b < +\infty$. Soit $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$. Alors, $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda))$ et $\int f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$ (cette dernière intégrale est à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 4.5 page 104. En fait l'exercice 4.5 s'intéresse au cas $[0,1]$ mais s'adapte facilement pour le cas général $[a,b]$. ■

Remarque 5.2

1. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les bornes sont $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (I peut être fermé ou ouvert en a et b) et si $f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$ ou $\mathrm{L}^1(\mathrm{I}, \mathcal{B}(\mathrm{I}), \lambda)$, on notera souvent :

$$\int f d\lambda = \int f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

   Cette notation est justifiée par la proposition précédente (proposition 5.1) car, si I est compact, l'intégrale de Lebesgue contient l'intégrale des fonctions continues (et aussi l'intégrale des fonctions réglées et aussi l'intégrale de Riemann, voir l'exercice 5.2).

2. Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in \mathrm{C}([a,b], \mathbb{R})$.

   La proposition 5.1 donne que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda))$. En fait, on écrira souvent que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda))$, c'est-à-dire qu'on confondra f avec sa classe dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$, qui est l'ensemble $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b],\ \mathcal{B}([a,b]),\ \lambda)\,;\ g = f$ p.p.$\}$. On peut d'ailleurs noter que f est alors le seul élément continu de $\{g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)\,;\ g = f$ p.p.$\}$ comme le montre la proposition suivante (proposition 5.3).

Proposition 5.3 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de longueur strictement positive et* $f, g \in C(\mathrm{I}, \mathbb{R})$. *On suppose que* $f = g$ λ*-p.p.. On a alors* $f(x) = g(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$.

Cette proposition est démontrée à l'exercice (corrigé) 3.11 page 69 pour $\mathrm{I} = \mathbb{R}$. La démonstration pour I quelconque est similaire.

Proposition 5.4 *Soit* $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *(c'est-à-dire que* f *est une fonction continue à support compact). Alors* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *(Ici aussi, on écrira souvent* $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.*)*

De plus, si $a, b \in \mathbb{R}$ *sont t.q.* $a < b$ *et* $f = 0$ *sur* $[a, b]^c$ *(de tels a et b existent). Alors,* $\int f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$ *(cette dernière intégrale étant à prendre au sens de l'intégrale des fonctions continues vue au Chapitre 1).*

DÉMONSTRATION – On remarque d'abord que f est borélienne car continue. Puis, pour montrer que f est intégrable, on utilise la proposition 5.1. Comme f est à support compact, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$ et $f = 0$ sur $[a, b]^c$. On a alors, par la proposition 5.1,

$$f_{|[a,b]} \in C([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda).$$

On a donc

$$\int |f| d\lambda = \int |f_{|[a,b]}| d\lambda < \infty$$

et donc $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Enfin, la proposition 5.1 donne aussi :

$$\int f_{|[a,b]} d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

D'où l'on conclut bien que $\int f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$. ■

Le résultat précédent se généralise à l'intégrale de Riemann des fonctions Riemann-intégrables (construite à partir des sommes de Darboux). Ceci fait l'objet de l'exercice 5.2.

5.2 Mesures abstraites et mesures de Radon

Remarque 5.5 Les propositions 5.1 et 5.4 donnent les résultats suivants :

1. Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{L}(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive, c'est-à-dire que $f \geq 0 \Rightarrow \mathrm{L}(f) \geq 0$. (On rappelle que $f \geq 0$ signifie que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

   Plus généralement, soit m une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, finie sur les compacts. Il est facile de voir que $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$). Pour $f \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{L}(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   On peut montrer une réciproque de ce résultat (théorème 5.6).

2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{L}(f) = \int f d\lambda$. L'application L est une application linéaire (de $C([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive.

   Ici aussi, plus généralement, soit m une mesure finie sur $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$. Il est facile de voir que $C([a, b], \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), m)$ (ou plutôt $C([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a, b], \mathcal{B}([a, b]), m)$). Pour $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{L}(f) = \int f dm$. L'application L est une application linéaire (de $C([a, b], \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$) positive (ou encore une forme linéaire positive).

   Ici aussi, on peut montrer une réciproque de ce résultat (voir la remarque 5.15).

On énonce maintenant des résultats, dus à F. Riesz, qui font le lien entre les applications linéaires (continues ou positives) sur des espaces de fonctions continues (applications que nous appellerons mesures de Radon) et les mesures abstraites sur $\mathcal{B}(\mathrm{R})$ (c'est-à-dire les applications $\sigma-$additives sur les boréliens de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$, non identiquement égales à $+\infty$). Le théorème 5.6 donné ci après est parfois appelé "Théorème de représentation de Riesz en théorie de la mesure". Dans ce livre, nous réservons l'appellation "Théorème de représentation de Riesz" pour le théorème 6.56 de représentation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

Théorème 5.6 (Riesz) *Soit* L *une forme linéaire positive sur* $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, c'est-à-dire une application linéaire positive de* $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*. Alors il existe une unique mesure* m *sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q. :*

$$\forall \ f \in \mathrm{C}_c, \ \ \mathrm{L}(f) = \int f\, dm.$$

De plus, m *est finie sur les compacts (c'est-à-dire* $m(\mathrm{K}) < +\infty$ *pour tout compact* K *de* $\mathbb{R}$*.)*

DÉMONSTRATION – La partie unicité de cette démonstration est assez facile et est donnée dans la proposition 5.8. La partie existence est plus difficile, on en donne seulement le schéma général, sous forme d'exercice détaillé.

Soit L une forme linéaire positive sur $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que L est continue au sens suivant : pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $\mathrm{C_K} \in \mathbb{R}$ t.q. pour toute fonction continue à support dans K, $|\mathrm{L}(f)| \le \mathrm{C_K}\|f\|_\infty$.
   [Considérer une fonction $\psi_\mathrm{K} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\psi_\mathrm{K}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{K}$ et $\psi_\mathrm{K}(x) \ge 0$ pour tout x.]
2. Montrer le lemme suivant :

   Lemme 5.7 (Dini) Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$. Alors f_n converge uniformément vers f.
3. Déduire des deux étapes précédentes que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ lorsque $n \to +\infty$, alors $\mathrm{L}(f_n) \to \mathrm{L}(f)$.
4. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des suites telles que $f_n \uparrow f$ et $g_n \uparrow g$ (ou $f_n \downarrow f$ et $g_n \downarrow g$), où f et g sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \le g$ alors $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) \le \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(g_n)$ (et dans le cas particulier où $f = g$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(g_n)$).
   [On pourra, par exemple, considérer, pour n fixé, $h_p = \inf(g_p, f_n)$ et remarquer que $h_p \uparrow f_n$.]
5. On définit :

$$\mathrm{A}_+ = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) < +\infty\}, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{A}_- = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) > -\infty\}, \tag{5.2}$$

   Si $f \in \mathrm{A}^+$, on pose $\mathrm{L}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \uparrow f$.
   Si $f \in \mathrm{A}^-$, on pose $\mathrm{L}(f) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n)$, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}); f_n \downarrow f$.
   Vérifier que ces définitions sont cohérentes (c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas des suites choisies et que si $f \in \mathrm{A}^+ \cap \mathrm{A}^-$, les deux définitions coincïdent). Montrer les propriétés suivantes :
   (a) Si $f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) alors $-f \in \mathrm{A}^-$ (resp. A^+)et $\mathrm{L}(-f) = -\mathrm{L}(f)$.
   (b) Si $f, g \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) alors $f + g \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $\mathrm{L}(f + g) = \mathrm{L}(f) + \mathrm{L}(g)$.
   (c) Si $f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $\alpha \in \mathbb{R}_+$ alors $\alpha f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $\mathrm{L}(\alpha f) = \alpha \mathrm{L}(f)$.
   (d) Si $f \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $g \in \mathrm{A}^+$ alors $\sup(f, g) \in \mathrm{A}^+$ et $\inf(f, g) \in \mathrm{A}^+$.
   (e) Si $f, g \in \mathrm{A}^+$ (resp. A^-) et $f \ge g$, alors $\mathrm{L}(f) \ge \mathrm{L}(g)$.
   (f) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{A}_+$ (resp. A^-) et $f_n \uparrow f \in \mathrm{A}^+$ (resp. $f_n \downarrow f \in \mathrm{A}^-$), alors $\mathrm{L}(f_n) \ge \mathrm{L}(f)$.

(g) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{A}_+$ (resp. A^-) t.q. $f_n \uparrow f$ (resp. $f_n \downarrow f$), où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(f_n) < +\infty$, alors $f \in \mathrm{A}^+$.

Remarquer aussi que A^+ contient toutes les fonctions caractéristiques des ouverts bornés et que A^- contient toutes les fonctions caractéristiques des compacts.

6. On pose :
$$\mathrm{E} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathrm{A}^+ \text{ et } h \in \mathrm{A}^-; h \le f \le g \text{ et } \mathrm{L}(g) - \mathrm{L}(h) \le \varepsilon\}$$
et pour $f \in \mathrm{E}$, on définit :
$$\mathrm{L}(f) = \sup_{h\in\mathrm{A}^-, h\le f} \mathrm{L}(h) = \inf_{g\in\mathrm{A}^-, g\ge f} \mathrm{L}(g).$$
Montrer que cette définition a bien un sens, c'est-à-dire que d'une part :
$$\sup_{h\in\mathrm{A}^-, h\le f} \mathrm{L}(h) = \inf_{g\in\mathrm{A}^-, g\ge f} \mathrm{L}(g),$$
et d'autre part la définition de L sur E est compatible avec la définition sur A^+ et A^- (après avoir remarqué que $\mathrm{A}^+ \subset \mathrm{E}$ et $\mathrm{A}^- \subset \mathrm{E}$). Montrer les propriétés suivantes sur E :
(a) E est un espace vectoriel et L une forme linéaire positive sur E.
(b) E est stable par passage à la limite croissante ou décroissante.
(c) E est stable par inf et sup, *i.e.* si $f \in \mathrm{E}$ et $g \in \mathrm{E}$, alors $\sup(f,g) \in \mathrm{E}$ et $\inf(f,g) \in \mathrm{E}$.
7. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}_c$ t.q. $0 \le \varphi_n \le 1$ et $\varphi_n \uparrow 1$. On pose $\mathrm{T} = \{\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); 1_\mathrm{A}\varphi_n \in \mathrm{E} \forall n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathrm{T} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
8. Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$, on pose : $m(\mathrm{A}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{L}(1_\mathrm{A}\varphi_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que m est une mesure σ-finie.
9. Montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathrm{T}, m) = \mathrm{E}$ et que $\int f\,dm = \mathrm{L}(f), \forall f \in \mathrm{E}$.

■

Proposition 5.8 *Soit $d \ge 1$, m et μ deux mesures sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, finies sur les compacts. On suppose que $\int f\,dm = \int f\,d\mu$, pour tout $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Alors $m = \mu$.*

La démonstration de cette proposition peut se faire en utilisant la proposition 2.31. Elle est faite pour $d = 1$ au chapitre 4 (proposition 4.60). Sa généralisation au cas $d > 1$ est laissée en exercice.

Remarque 5.9 Le théorème 5.6 donne un autre moyen de construire la mesure de Lebesgue que celui vu au chapitre 2 :

Pour $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\mathrm{L}(f) = \int_a^b f(x)dx$, où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis pour que $f = 0$ sur $[a,b]^c$ (on utilise ici l'intégrale des fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}$). L'application L est clairement linéaire positive de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème 5.6 donne donc l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q. $\int f\,dm = \mathrm{L}(f)$ pour tout $f \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette mesure est justement la mesure de Lebesgue (elle vérifie bien $m(]a,b[) = b - a$ pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).

Définition 5.10 *On définit les espaces de fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) suivants :*
$$\mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\},$$
$$\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to +\infty\},$$
$$\mathrm{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \exists \mathrm{K} \subset \mathbb{R}, \mathrm{K} \text{ compact, } f = 0 \text{ sur } \mathrm{K}^c\}.$$
Pour $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. La norme $\|\cdot\|_u$ s'appelle norme de la convergence uniforme (elle est aussi parfois appelée norme infinie.)

Il est clair que $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on rappelle que $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont des espaces de Banach (e.v.n. complet) avec la norme $\|\cdot\|_u$. Ces espaces seront parfois notés, en abrégé, C_c, C_0 et C_b.

Remarque 5.11 Soit m une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$ (en toute rigueur, on a plutôt $C_b \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),m)$). Pour $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $L(f) = \int f\,dm$. L'application L est alors une application linéaire sur $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On munit $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, L'application L est alors continue (car $L(f) \le m(\mathbb{R})\|f\|_u$ pour tout $f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$). L'application L est aussi positive, c'est-à-dire que $f \ge 0 \Rightarrow L(f) \ge 0$. On donne ci-après des réciproques partielles de ces résultats.

Théorème 5.12 (Riesz) *Soit* L *une application linéaire positive de* $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors il existe une unique mesure m finie sur* $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *t.q. :*

$$\forall\ f \in C_0,\ \ L(f) = \int f\,dm.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration consiste d'abord à montrer que L est continue (quand $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est muni de sa norme naturelle, c'est-à-dire de la norme $\|\cdot\|_u$). C'est la première étape ci-dessous. Puis à appliquer le théorème 5.6, c'est le deuxième étape.

Étape 1

On montre, dans cette étape, que L est continue.

On raisonne par l'absurde. Si L n'est pas continue, il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $L(f_n) \ge n$ et $\|f_n\|_u = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $g_n = |f_n|/(n^2)$, on a $g_n \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et en utilisant la linéarité et la positivité de L, on obtient

$$L(g_n) = \frac{1}{n^2}L(|f_n|) \ge \frac{1}{n^2}L(f_n) \ge \frac{1}{n} \text{ et } \|g_n\|_u = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ est absolument convergente dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, elle est donc convergente (car $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un espace de Banach). On note g la somme de cette série. On a donc $g \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et comme les fonctions g_n sont positives,

$$L(g) \ge \sum_{p=1}^{n} L(g_p) \ge \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $L(g) = +\infty$, ce qui est absurde.

On a donc bien montré que L est continue. Il existe donc M t.q. $L(f) \le M\|f\|_u$ pour tout $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Etape 2

La restriction de L à $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est linéaire positive. Le théorème 5.6 donne l'existence d'une mesure m sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ t.q.

$$L(f) = \int f\,dm \text{ pour tout } f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \tag{5.3}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$\varphi_n = 1_{[-n,n]} + (x+n+1)1_{[-(n+1),-n]} + (n+1-x)1_{[n,n+1]},$$

et on prend $f = \varphi_n$ dans (5.3). On obtient $m([-n,n]) \le L(\varphi_n) \le M\|\varphi_n\|_u = M$. On a donc, en faisant $n \to +\infty$, $m(\mathbb{R}) \le M$, ce qui prouve que m est une mesure finie.

Enfin, si $f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on pose $f_n = f\varphi_n$. On remarque que f_n tend vers f dans $C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et est dominée par $|f|$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} L(f_n) = L(f)$ car L est continue et $\lim_{n\to+\infty}\int f_n\,dm = \int f\,dm$ par convergence dominée. Comme $L(f_n) = \int f_n\,dm$ (car $f_n \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$), on obtient finalement $L(f) = \int f\,dm$. ■

Le résultat du théorème 5.12 est faux si on remplace C_0 par C_b. On peut, par exemple, construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle sur C_b et nulle sur C_0. Si on note L une telle application (nulle sur C_0 mais non identiquement nulle sur C_b) et si m est une mesure finie sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.q. $L(f) = \int f dm$ pour $f \in C_b$, on montre facilement (en utilisant $\int f dm = 0$ pour tout $f \in C_0$) que $m = 0$ et donc $L(f) = 0$ pour tout $f \in C_b$, en contradiction avec le fait que L n'est pas identiquement nulle sur C_b.

Pour construire une application linéaire continue positive sur C_b, non identiquement nulle et nulle sur C_0, on peut procéder de la manière décrite ci après. On note F le sous espace vectoriel de C_b formé des éléments de C_b ayant une limite en $+\infty$. On a donc $f \in F$ si $f \in C_b$ et s'il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x) \to l$ quand $x \to +\infty$. Pour $f \in F$ on pose $\tilde{L}(f) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$. On a ainsi défini une forme linéaire positive sur F (car, pour $f \in F$, $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ implique bien $\tilde{L}(f) \geq 0$). En utilisant le théorème 5.14 donné ci après, il existe donc L, forme linéaire positive sur C_b, t.q. $L = \tilde{L}$ sur F. L'application L est donc linéaire continue positive sur C_b (pour la continuité, on remarque que $|L(f)| \leq \|f\|_u$), elle est bien nulle sur C_0 (car $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ si $f \in C_0 \subset F$) et non identiquement nulle sur C_b car $L(f) = 1$ si f est la fonction constante, égale à 1 en tout point.

Remarque 5.13 Soit E un espace de Banach réel, F un s.e.v. de E et T une application linéaire continue de F (muni de la norme de E) dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Hahn-Banach [1] donne alors l'existence d'une application linéaire continue $\bar{T}$ de E dans $\mathbb{R}$ (*i.e.* $\bar{T} \in E'$) t.q. $\tilde{T} = T$ sur F. (Si F est dense dans E, le théorème de Hahn-Banach est inutile et on peut montrer aussi l'unicité de $\bar{T}$. Si F n'est pas dense dans E, $\tilde{T}$ n'est pas unique.) L'objectif du théorème 5.14 est de remplacer l'hypothèse de continuité de T par une propriété de positivité.

Théorème 5.14 (Hahn-Banach positif) *Soit* F *un sous espace vectoriel de* $C_b = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}); \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\}$ *et* T *une application linéaire de* F *dans* $\mathbb{R}$. *On suppose que* F *contient les fonctions constantes et que* T *est positive (c'est-à-dire que, pour* $f \in F$, $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *implique* $T(f) \geq 0$*). Il existe alors* $\overline{T}$*, application linéaire positive sur* C_b*, t.q.* $\overline{T} = T$ *sur* F.

DÉMONSTRATION – La démonstration n'est pas détaillée ici. Elle peut se faire en utilisant une technique très similaire à celle donnant la démonstration du théorème de Hahn-Banach (qui permet aussi de montrer le théorème de prolongement d'une application linéaire continue définie sur un sous espace vectoriel d'un espace de Banach). Elle peut aussi se faire en se ramenant à la version du théorème de Hahn-Banach donné, par exemple, dans le livre d'analyse fonctionnelle de H. Brezis [1].

Il est intéressant de noter que le résultat du théorème peut être faux si on retire l'hypothèse F contient les fonctions constantes. ■

On peut maintenant faire la remarque suivante :

Remarque 5.15 Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. On note $C(K,\mathbb{R}) = \{f_{|K}, f \in C_b\}$. Si m est une mesure finie sur $(K,\mathcal{B}(K))$ l'espace fonctionnel $C(K,\mathbb{R})$ est inclus dans $L^1_{\mathbb{R}}(K,\mathcal{B}(K),m)$, et l'application qui à $f \in C(K,\mathbb{R})$ associe $\int f dm$ est linéaire positive (et continue, si $C(K,\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, soit L une application linéaire positive de $C(K,\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent permet de montrer qu'il existe une unique mesure finie, notée m, sur $(K,\mathcal{B}(K))$ t.q. :

$$L(f) = \int f dm, \quad \forall f \in C(K,\mathbb{R}).$$

Considérons maintenant le cas des mesures signées : si m est une mesure signée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (ou sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B}(\mathrm{K}))$), l'application qui à $f \in \mathrm{C}_0$ (ou $\in \mathrm{C}(\mathrm{K})$, K étant une partie compacte de $\mathbb{R}$) associe $\int f\,dm$ est linéaire continue (pour la norme de la convergence uniforme). Réciproquement, on a aussi existence et unicité d'une mesure (signée) définie à partir d'une application linéaire continue de C_0 (ou de $\mathrm{C}(\mathrm{K})$) dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5.16 (Riesz, mesures signées) *Soit* L *une application linéaire continue de* $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$ *(ou de* $\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*, où* K *est un compact de* $\mathbb{R}$*). Alors il existe une unique mesure signée, notée m, sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(ou sur* $\mathcal{B}(\mathrm{K})$*) t.q. :*

$$\mathrm{L}(f) = \int f\,dm, \ \ \forall f \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})(\textit{ ou } \mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R})).$$

Les éléments de $(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}))'$ *(ou* $(\mathrm{C}(\mathrm{K}, \mathbb{R}))'$*) sont appelés mesures de Radon sur* $\mathbb{R}$ *(ou* K*). On rappelle que, pour un espace de Banach (réel)* E*, on note* E′ *son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* $\mathbb{R}$*.*

DÉMONSTRATION – Elle consiste à se ramener au théorème de Riesz pour des formes linéaires positives. Elle n'est pas détaillée ici. On rappelle seulement que si m est une mesure signée sur T (tribu sur un ensemble E). il existe deux mesures finies m^+ et m^- sur T, étrangères (c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$ t.q. $m^+(\mathrm{A}) = m^-(\mathrm{A}^c) = 0$) et t.q. $m = m^+ - m^-$. On a alors (par définition)

$$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m^+) \cap \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m^-),$$

et, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$,

$$\int f\,dm = \int f\,dm^+ - \int f\,dm^-.$$

■

Définition 5.17 (Mesure de Radon) *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}$*, alors on appelle mesure de Radon sur* $\overline{\Omega}$ *un élément de* $(\mathrm{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}))'$*, c'est-à-dire une application linéaire continue (pour la norme infinie) de* $\mathrm{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Remarque 5.18 Soit T une forme linéaire sur $\mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Si T est continue pour la norme $\|.\|_\infty$, on peut montrer qu'il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que

$$\mathrm{T}(f) = \int f\,d\mu \text{ pour tout } f \in \mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R}).$$

   Pour montrer l'existence de μ, on peut commencer par se ramener au théorème 5.16 en prolongeant T (de manière non unique) en une application linéaire continue sur $\mathrm{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ (ceci est possible par le théorème de Hahn-Banach). Le théorème 5.16 donne alors une (unique) mesure sur $\mathcal{B}(\overline{\Omega})$ correspondant à ce prolongement de T. La restriction de cette mesure à $\mathcal{B}(\Omega)$ est la mesure μ recherchée. Il est intéressant de remarquer que cette mesure μ est unique, sans que celle donnée par le théorème 5.16 soit unique (car cette dernière dépend du prolongement choisi de T à $\mathrm{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$).
2. Si T est continue pour la topologie naturelle de $\mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$, (c'est-à-dire que, pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe $\mathrm{C}_\mathrm{K} \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}(f) \le \mathrm{C}_\mathrm{K}\|f\|_\infty$, pour tout $f \in \mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R})$ avec $f = 0$ sur le complémentaire de K) alors le résultat donné dans le premier item (c'est-à-dire l'existence de μ) peut être faux ; par contre on peut montrer qu'il existe deux mesures (positives) μ_1 et μ_2 sur les boréliens de Ω telles que

$$\mathrm{T}(f) = \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2, \ \forall f \in \mathrm{C}_c(\Omega, \mathbb{R});$$

   on peut noter que μ_1 et μ_2 peuvent prendre toutes les deux la valeur $+\infty$ (exemple : $\mathrm{N} = 1$, $\Omega =]-1, 1[$, $\mathrm{T}(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n f(1 - \frac{1}{n}) - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n f(-1 + \frac{1}{n})$), et donc que $(\mu_1 - \mu_2)(\Omega)$ n'a pas toujours un sens.

Soit maintenant T une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, continue pour la norme $\|\cdot\|_u$, alors il existe une et une seule mesure signée, notée μ, sur les boréliens de Ω telle que

$$\mathrm{T}(f) = \int f d\mu, \forall f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}).$$

5.3 Changement de variable, densité et continuité

On montre dans cette section quelques propriétés importantes de l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (et éventuellement de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ si μ est finie sur les compacts).

Proposition 5.19 (Changement de variable affine) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ par } g(x) = f(\alpha x + \beta) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda.$$

Le même résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{L}^1$ par L^1.

DÉMONSTRATION – 1. On pose $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de sorte que $g = f \circ \varphi$. Comme f et φ sont boréliennes (noter que φ est même continue), g est aussi borélienne, c'est-à-dire $g \in \mathcal{M}$.

2. Pour montrer que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et

$$\int g d\lambda = \frac{1}{|\alpha|} \int f d\lambda, \tag{5.4}$$

on raisonne en plusieurs étapes :

(a) On suppose que $f = 1_{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(\mathrm{A}) < +\infty$. On a alors $g = 1_{\frac{1}{\alpha}\mathrm{A} - \frac{\beta}{\alpha}}$ (avec $\frac{1}{\alpha}\mathrm{A} - \frac{\beta}{\alpha} = \{\frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha}, x \in \mathrm{A}\}$). On a donc $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.4) est vraie (car on a déjà vu que $\lambda(\frac{1}{\alpha}\mathrm{A} - \frac{\beta}{\alpha}) = \frac{1}{|\alpha|}\lambda(\mathrm{A})$, dans la proposition 2.48).

(b) On suppose que $f \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
Il existe donc $a_1, \ldots, a_n > 0$ et $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in T$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$. Comme $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a aussi $\lambda(\mathrm{A}_i) < +\infty$ pour tout i. On conclut alors que $g = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\frac{1}{\alpha}\mathrm{A}_i - \frac{\beta}{\alpha}}$, ce qui donne que $g \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.4) est vraie.

(c) On suppose que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\int f_n d\lambda \uparrow \int f d\lambda$ quand $n \to +\infty$. On définit g_n par $g_n(x) = \alpha x + \beta$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$g_n \in \mathcal{E}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),\ g_n \uparrow g \text{ et } \int g_n d\lambda \uparrow \int g d\lambda \text{ quand } n \to +\infty.$$

Comme (5.4) est vraie pour $f = f_n$ et $g = g_n$, on en déduit que $g \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et (5.4) est vraie.

(d) On suppose enfin seulement que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Comme

$$f = f^+ - f^-, \text{ avec } f^\pm \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda),$$

on peut utiliser l'étape précédente avec $f^\pm$ et on obtient que $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (5.4) est vraie.

3. Le résultat obtenu est encore vrai pour L^1 au lieu de $\mathcal{L}^1$. Il suffit de remarquer que

$$f_1 = f_2 \text{ p.p. } \Rightarrow g_1 = g_2 \text{ p.p. }, \text{ avec } g_i(\cdot) = f_i(\alpha \cdot + \beta),\ i = 1, 2.$$

En fait, lorsque f décrit un élément de L^1 (qui est un ensemble d'éléments de $\mathcal{L}^1$), la fonction $g(\alpha \cdot + \beta)$ décrit alors un élément de L^1.

■

Le résultat de densité que nous énonçons à présent permet d'approcher une fonction de $\mathrm{L}^1_{\mathrm{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ aussi près que l'on veut par une fonction continue à support compact. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer certaines propriétés des fonctions de L^1 : on montre la propriété pour les fonctions continues, ce qui s'avère en général plus facile, et on passe à la limite.

Théorème 5.20 (Densité de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$) *On note $\mathrm{L}^1=\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'ensemble $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et à supports compacts, est dense dans L^1, c'est-à-dire :*

$$\forall f\in\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda),\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\varphi\in\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R});\ \|f-\varphi\|_1<\varepsilon.$$

DÉMONSTRATION – On a déjà vu que $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset\mathrm{L}^1$. En toute rigueur, on a plutôt $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset\mathcal{L}^1=\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. L'objectif est donc de montrer que pour tout $f\in\mathcal{L}^1$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $\varphi\in\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1\le\varepsilon$. On va raisonner une nouvelle fois en plusieurs étapes (fonctions caractéristiques, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{M}_+$ et enfin $\mathcal{L}^1$).

Etape 1. On suppose ici que $f=1_{\mathrm{A}}$ avec $\mathrm{A}\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(\mathrm{A})<+\infty$.

Soit $\varepsilon>0$. Comme λ est une mesure régulière (proposition 2.43), il existe un ouvert O et un fermé F tels que $\mathrm{F}\subset\mathrm{A}\subset\mathrm{O}$ et $\lambda(\mathrm{O}\setminus\mathrm{F})\le\varepsilon$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{F}_n=\mathrm{F}\cap[-n,n]$, de sorte que F_n est compact (pour tout n) et $\mathrm{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{F}_n$. La continuité croissante de λ donne alors $\lambda(\mathrm{F}_n)\uparrow\lambda(\mathrm{F})$, quand $n\to+\infty$. Comme $\lambda(\mathrm{F})\le\lambda(\mathrm{A})<+\infty$, on a aussi $\lambda(\mathrm{F}\setminus\mathrm{F}_n)=\lambda(\mathrm{F})-\lambda(\mathrm{F}_n)\to0$ quand $n\to+\infty$. Il existe donc n_0 tel que $\lambda(\mathrm{F}\setminus\mathrm{F}_{n_0})\le\varepsilon$.

On pose $\mathrm{K}=\mathrm{F}_{n_0}$ et on obtient donc $\mathrm{K}\subset\mathrm{F}\subset\mathrm{A}\subset\mathrm{O}$, ce qui donne

$$\lambda(\mathrm{O}\setminus\mathrm{K})\le\lambda(\mathrm{O}\setminus\mathrm{F})+\lambda(\mathrm{F}\setminus\mathrm{K})\le2\varepsilon.$$

On a donc trouvé un compact K et un ouvert O tels que $\mathrm{K}\subset\mathrm{A}\subset\mathrm{O}$ et $\lambda(\mathrm{O}\setminus\mathrm{K})\le2\varepsilon$. Ceci va nous permettre de construire $\varphi\in\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1\le2\varepsilon$.

On pose

$$d=d(\mathrm{K},\mathrm{O}^c)=\inf\{d(x,y),x\in\mathrm{K},y\in\mathrm{O}^c\}.$$

On remarque que $d>0$. En effet, il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{K}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{O}^c$ telles que

$$d(x_n,y_n)=|x_n-y_n|\to d\text{ quand }n\to+\infty.$$

Par compacité de K, on peut supposer (après extraction éventuelle d'une sous-suite) que $x_n\to x$, quand $n\to+\infty$. Si $d=0$, on a alors aussi $y_n\to x$ quand $n\to+\infty$ et donc $x\in\mathrm{O}^c\cap\mathrm{K}$ (car K et O^c sont fermés), ce qui est impossible car $\mathrm{O}^c\cap\mathrm{K}=\emptyset$. On a donc bien montré $d>0$.

On définit maintenant la fonction φ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\varphi(x)=\frac{1}{d}(d-d(x,\mathrm{K}))^+\text{ avec }d(x,\mathrm{K})=\inf\{d(x,y),\,y\in\mathrm{K}\}.$$

La fonction φ est continue car $x\mapsto d(x,\mathrm{K})$ est continue (cette fonction est même lipschitzienne, on peut montrer que $|d(x,\mathrm{K})-d(y,\mathrm{K})|\le|x-y|$). Elle est à support compact car il existe $\mathrm{A}>0$ tel que $\mathrm{K}\subset[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ et on remarque alors que $\varphi=0$ sur $[-\mathrm{A}-d,\mathrm{A}+d]^c$. On a donc $\varphi\in\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Enfin, on remarque que $\varphi=1$ sur K, $\varphi=0$ sur O^c et $0\le\varphi\le1$ (partout). On en déduit que $f-\varphi=0$ sur $\mathrm{K}\cup\mathrm{O}^c$ et $0\le|f-\varphi|\le1$, ce qui donne

$$\|f-\varphi\|_1\le\lambda(\mathrm{O}\setminus\mathrm{K})\le2\varepsilon,$$

et termine donc la première (et principale) étape.

Etape 2. On suppose ici que $f\in\mathcal{E}_+\cap\mathcal{L}^1$. Il existe donc $a_1,\ldots,a_n>0$ et $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n\in\mathrm{T}$ tels que $f=\sum_{i=1}^n a_i1_{\mathrm{A}_i}$. Comme $f\in\mathcal{L}^1$, on a aussi $\lambda(\mathrm{A}_i)<+\infty$ pour tout i.

Soit $\varepsilon>0$, l'étape 1 donne, pour tout i, l'existence de $\varphi_i\in\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|1_{\mathrm{A}_i}-\varphi_i\|_1\le\varepsilon$. On pose

$$\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i\in\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

et on obtient
$$\|f-\varphi\|_1 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i)\varepsilon$$
(ce qui est bien arbitrairement petit).

Etape 3. On suppose ici que $f \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la caractérisation de l'intégrale dans $\mathcal{M}_+$ (lemme 4.9), il existe $g \in \mathcal{E}_+$ telle que $g \le f$ et
$$\int f d\lambda - \varepsilon \le \int g dm \le \int f dm,$$
de sorte que
$$\|g-f\|_1 = \int (f-g)d\lambda \le \varepsilon,$$
L'étape 2 donne alors l'existence de $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\|g-\varphi\|_1 \le \varepsilon$. D'où l'on déduit
$$\|f-\varphi\|_1 \le 2\varepsilon,$$
ce qui termine l'étape 3.

Etape 4. On suppose enfin que $f \in \mathcal{L}^1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f^{\pm} \in \mathcal{M}_+ \cap \mathcal{L}^1$, l'étape 3 donne qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que
$$\|f^+ - \varphi_1\|_1 \le \varepsilon \text{ et } \|f^- - \varphi_2\|_1 \le \varepsilon.$$
On pose alors $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. On a $\varphi \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\|f-\varphi\|_1 \le 2\varepsilon$, ce qui prouve bien la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans L^1.

■

Le résultat de densité que nous venons de démontrer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. Enfin, il n'est pas limité à $\mathbb{R}$, il est également vrai dans $\mathbb{R}^d$, $d \ge 1$. Tout ceci est montré dans l'exercice 7.14. Par contre, le résultat de continuité en moyenne que nous montrons maintenant n'est pas vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, finie sur les compacts (voir l'exercice 7.14).

Théorème 5.21 (Continuité en moyenne) *Soient $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :*
$$\|f_h - f\|_1 = \int |f(x+h) - f(x)|dx \to 0 \text{ lorsque } h \to 0. \tag{5.5}$$

DÉMONSTRATION – Soient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$. On remarque que $f_h = f(\cdot + h) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ (d'après la proposition 5.19). D'autre part $f = g$ p.p. implique $f_h = g_h$ p.p.. On peut donc définir f_h comme élément de $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ si $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

La démonstration de (5.5) fait l'objet de l'exercice 5.10. ■

5.4 Intégrales impropres des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On considère ici des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

Définition 5.22 (Intégrabilité à gauche) *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall\ \beta \in]\alpha, a[$, $f 1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. On dit que f est intégrable à gauche en a (ou encore que $\int^a$ existe) si $\int f 1_{]\alpha,\beta[} d\lambda$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $\beta \to a$. Cette limite est notée $\int_\alpha^a f(t)dt$.*

Remarque 5.23 Ceci ne veut pas dire que $f 1_{]\alpha,a[} \in L^1$. Il suffit pour s'en convaincre de prendre $a = +\infty$, $\alpha = 0$, considérer la fonction f définie par $f(0) = 1$ et, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Par contre, dès que la fonction f considérée est de signe constant, on a équivalence entre les deux notions :

Proposition 5.24 *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, a > \alpha$; on suppose que $\forall\ \beta \in]\alpha, a[$, $f 1_{]\alpha,\beta[} \in L^1 (= L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda))$. Alors f est intégrable à gauche en a si et seulement si $f 1_{]\alpha,a[} \in L^1$.*

DÉMONSTRATION – Ce résultat se déduit du théorème de convergence monotone en remarquant que $f 1_{]\alpha,\beta[} \uparrow f 1_{]\alpha,a[}$ quand $\beta \uparrow a$. ■

5.5 Exercices

Exercice 5.1 (La mesure de Dirac n'est pas une fonction...) Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = (1 - n|x|)^+$. On note λ la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $]-1,1[$, et $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(]-1,1[, \mathcal{B}(]-1,1[), \lambda)$. Soit T l'application de $C([-1,1],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $T(\varphi) = \varphi(0)$.

1. Montrer que $T \in \big(C([-1,1], \mathbb{R})\big)'$ (on rappelle que $\big(C([-1,1], \mathbb{R})\big)'$ est le dual de $C([-1,1], \mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $C([-1,1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme).
2. Soit $\varphi \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi \in L^1_{\mathbb{R}}(]-1,1[, \mathcal{B}(]-1,1[), \delta_0)$, où δ_0 est la mesure de Dirac en 0, et que $T(\varphi) = \int \varphi d\delta_0$.
3. Soient $g \in L^1$. Montrer que $\int g\varphi_n d\lambda \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   En déduire qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^1$ telle qu'on ait, pour toute fonction $\varphi \in C([-1,1],\mathbb{R})$, $T(\varphi) = \int g\varphi d\lambda$ (et donc que δ_0 n'est pas une mesure de densité).

Exercice 5.2 (Intégrale de Riemann) Soient a, b des réels, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, *i.e.* telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| \leq M, \forall t \in [a,b]$.
Soit Δ une subdivision de $[a,b]$, $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N+1}\}$ avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$. On pose

$$S^\Delta = \sum_{i=0}^{N} (\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1} - x_i) \text{ et } S_\Delta = \sum_{i=0}^{N} (\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x))(x_{i+1} - x_i).$$

On note A l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, $S^* = \inf_{\Delta\in A} S^\Delta$ et $S_* = \sup_{\Delta\in A} S_\Delta$. On dit que f est Riemann intégrable si $S^* = S_*$.
On pose alors $R\int_a^b f(x)dx = S^*$.

1. Soient Δ_1 et $\Delta_2 \in A$ tels que $\Delta_1 \subset \Delta_2$. Montrer que $S_{\Delta_1} \leq S_{\Delta_2} \leq S^{\Delta_2} \leq S^{\Delta_1}$. En déduire que $S_\Delta \leq S^{\Delta'}$ pour tous $\Delta, \Delta' \in A$, et donc que $S_* \leq S^*$.
2. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $S_{\Delta_n} \to S_*$ et $S^{\Delta_n} \to S^*$ quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que si f est continue, f est Riemann-intégrable.
4. On suppose maintenant que f est Riemann-intégrable. Montrer qu'il existe une suite de subdivisions notée $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_{\Delta_n} \to \mathrm{S}_*$ et $\mathrm{S}^{\Delta_n} \to \mathrm{S}^*$ quand $n \to +\infty$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Delta_n = \{x_0^{(n)}, \ldots, x_{\mathrm{N}_n+1}^{(n)}\}$ et on pose :

$$g_n(x) = \inf\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, \mathrm{N}_n, \tag{5.6}$$

$$h_n(x) = \sup\{f(y), y \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]\}, x_i^{(n)} \le x < x_{i+1}^{(n)}, i = 0, \ldots, \mathrm{N}_n, \tag{5.7}$$

$$g_n(b) = h_n(b) = 0. \tag{5.8}$$

   (a) Montrer que $g_n, h_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\{[a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda\})$ et que $\int (h_n - g_n) d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   (b) Montrer que $g_n \le g_{n+1} \le f \le h_{n+1} \le h_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   (c) Pour $x \in [a,b]$, on pose $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$ et $h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x)$; montrer que $g = h$ p.p.. En déduire que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$ et que $\int f d\lambda = \mathrm{R}\int_a^b f(x)dx$.
5. Soit f définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, & (5.9)\\ f(x) &= 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. & (5.10)\end{aligned}$$

   Montrer que f n'est pas Riemann intégrable, mais que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda)$.

Exercice 5.3 (Convergence de la dérivée) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$ convergeant simplement vers la fonction $f :]0,1[\to \mathbb{R}$; on suppose que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ($\subset \mathrm{C}(]0,1[, \mathbb{R})$) converge simplement vers la fonction constante et égale à 1.

1. A-t-on $f \in \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?
2. On suppose maintenant que la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ vers la fonction constante et égale à 1. A-t-on $f \in \mathrm{C}^1(]0,1[, \mathbb{R})$ et $f' = 1$?

Exercice 5.4 (Intégrale impropre) On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \text{ si } x \le 0,\\ &f(x) = x^2 \sin \tfrac{1}{x^2}, \text{ si } x > 0.\end{aligned}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Soit $0 < a < b < +\infty$. Montrer que $f'1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On pose $\int_a^b f'(t)dt = \int f'1_{]a,b[} d\lambda$. Montrer que :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

3. Soit $a > 0$.

   (a) Montrer $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

   (b) Pour $0 < x < a$, on pose $g(x) = \int_x^a f'(t)dt$. Montrer que $g(x)$ a une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $x \to 0$, avec $x > 0$, et que cette limite est égale à $f(a) - f(0)$. (Cette limite est aussi notée $\int_0^a f'(t)dt$, improprement… car $f'1_{]0,a[} \notin \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la restriction de f' à $]0,a[$ n'est donc pas intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $]0,a[$.)

Exercice 5.5
Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On définit $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\mathrm{F}(x) = \int f 1_{[0,x]} d\lambda (= \int_0^x f(t)dt)$, pour $x \geq 0$, et $\mathrm{F}(x) = -\int f 1_{[x,0]} d\lambda (= -\int_x^0 f(t)dt)$ pour $x < 0$. Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 5.6 (Intégrabilité et limite à l'infini) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) = \mathcal{L}^1$.

1. On suppose que $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$. Montrer que cette limite est nulle.
2. On suppose que $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; a-t-on : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?
3. On suppose que f est uniformément continue. A-t-on $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$?
   [On pourra commencer par montrer que, pour tout $\eta > 0$ et toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, on a
   $$\lim_{n \to +\infty} \int_{x_n - \eta}^{x_n + \eta} |f(x)| d\lambda(x) = 0.]$$
4. On suppose que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f' \in \mathrm{L}^1$; a-t-on : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$?

Exercice 5.7 (Intégrabilité de certaines fonctions) On s'intéresse dans cet exercice à l'intégrabilité de fonctions classiques.

1. On considère l'espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[, \lambda)$. Soit $0 < \alpha < +\infty$. On pose, pour $x \in]0,1[$, $f(x) = (\dfrac{1}{x})^\alpha$. Pour quelles valeurs de α a-t-on $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$?
2. On considère l'espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m) = (\mathbb{R}^*_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^*_+), \lambda)$. Soit f définie, pour $x \in]0, +\infty[$, par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Montrer que $f \notin \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$. On pose $f_n = f 1_{]0,n[}$. Montrer que $f_n \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$, que $f_n \to f$ p.p. (et même uniformément) et que $\displaystyle\int f_n dm$ a une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5.8 (Égalité presque partout de fonctions continues) On munit $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et de la mesure de Lebesgue λ_N. Cette mesure, dont l'existence sera prouvée au chapitre 7, vérifie :

$$\lambda_\mathrm{N}\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_i\right) = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} \lambda(\mathrm{A}_i), \forall \mathrm{A}_1, \ldots \mathrm{A}_\mathrm{N} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \; ; \lambda(\mathrm{A}_i) < +\infty, i = 1, \ldots, \mathrm{N}.$$

Soient f et $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ telles que $f = g$ p.p.. Montrer que $f = g$ partout.
[On dira donc que $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ est continue s'il existe $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ telle que $f = g$ p.p. (plus précisément on devrait écrire $g \in f$). Dans ce cas on identifie f avec g.]

Exercice 5.9 (Un sous espace de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R})$) (*Notation : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note f^2 la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f^2(x) = (f(x))^2$.*)
On note L^1 l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \in \mathrm{L}^1 \text{ et } f'^2 \in \mathrm{L}^1\}$.
Pour $f \in \mathrm{E}$, on définit $\|f\| = \int |f| d\lambda + (\int |f'|^2 d\lambda)^{\frac{1}{2}}$

1. Montrer que $(\mathrm{E}, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. E est-il un espace de Banach ?
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}^*_+$. Montrer que $a \leq \delta a^2 + \frac{1}{\delta}$. En déduire que pour $f \in \mathrm{E}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta \in \mathbb{R}^*_+$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \delta \int |f'|^2 d\lambda + \frac{1}{\delta}|x - y|$.
3. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que f est uniformément continue, bornée, et que $f^2 \in \mathrm{L}^1$.

Exercice 5.10 (Continuité en moyenne) Pour $f \in L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit f_h (translatée de f) par : $f_h(x) = f(x+h)$, pour $x \in \mathbb{R}$. (noter que $f_h \in L^1$).

1. Soit $f \in C_c = C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.
2. Soit $f \in L^1$, montrer que $\|f_h - f\|_1 \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Exercice 5.11 (Non existence de borélien "bien équilibré")
On note $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1. Pour $f \in L^1$, $h \in \mathbb{R}^*_+$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_h(x) = \frac{1}{\lambda(B(0,h))} \int_{B(x,h)} f(y)dy,$$

   où $B(x,h)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon h. Montrer que f_h est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f_h \in L^1$ et que $f_h \to f$ dans L^1 lorsque $h \to 0$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de continuité en moyenne dans L^1.]

   En déduire qu'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $h_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$ et $f_{h_n} \to f$ p.p. lorsque $n \to +\infty$.

   N.B. : Ce résultat s'étend au cas $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, où λ_N est la mesure de Lebesgue N-dimensionnelle, définie au chapitre 7.
2. Montrer qu'il n'existe pas de borélien A inclus dans [0,1] et tel que $\lambda(I \cap A) = \lambda(I \cap A^c) = \frac{\lambda(I)}{2}$ pour tout intervalle I de $[0,1]$. [On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente et f convenablement choisie. Cette question est aussi une conséquence de l'exercice 5.12.]

Exercice 5.12 (Sur la concentration d'un borélien) Soit $-\infty \le a < b \le +\infty$, $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ et $\rho \in]0,1[$. On suppose que $\lambda(A \cap]\alpha,\beta[) \le \rho(\beta - \alpha)$ pour tous α, β tels que $a \le \alpha < \beta \le b$. Montrer que $\lambda(A) = 0$. [On pourra, par exemple, commencer par montrer que $\lambda(A \cap O) \le \rho\lambda(O)$ pour tout ouvert O de $]a,b[$.]

Conséquence de cet exercice : Si $A \in \mathcal{B}(]a,b[)$ est tel que $\lambda(A) > 0$, alors, pour tout $\rho < 1$, il existe α, β tels que $a \le \alpha < \beta \le b$ et $\lambda(A \cap]\alpha,\beta[) \ge \rho(\beta - \alpha)$.

Exercice 5.13 (Points de Lebesgue) On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$, par L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$ et par $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda)$. On note $dt = d\lambda(t)$.

1. Soit $(I_1, \ldots, I_n)$ des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ tels que chaque intervalle n'est pas contenu dans la réunion des autres. On pose $I_k =]a_k, b_k[$ et on suppose que la suite $(a_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante. Montrer que la suite $(b_k)_{k=1,\ldots,n}$ est croissante et que les intervalles d'indices impairs [resp. pairs] sont disjoints deux à deux.
2. Soit J une famille finie d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ dont la réunion est notée A. Montrer qu'il existe une sous–famille finie de J, notée $(I_1, \ldots, I_m)$, formée d'intervalles disjoints deux à deux et tels que $\lambda(A) \le 2\sum_{k=1}^m \lambda(I_k)$. [Utiliser la question 1.]

   On se donne maintenant $f \in L^1$ et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f = 0$ p.p. sur $[-a,a]^c$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)dt \to f(x), \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \text{ quand } n \to +\infty. \tag{5.11}$$

   Pour $\varepsilon > 0$, on définit f^*_ε de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f^*_\varepsilon(x) = \sup_{h \ge \varepsilon} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)|dt. \tag{5.12}$$

3.(a) Montrer que f_ε^* est bornée.
   (b) Montrer que f_ε^* est borélienne. [On pourra montrer que f_ε^* est le sup de fonctions continues.]
   (c) Montrer que $f_\varepsilon^*(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.

4. Pour $y > 0$, on pose $\mathrm{B}_{y,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon^*(x) > y\}$.
   (a) Montrer que tout $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est le centre d'un intervalle ouvert $\mathrm{I}(x)$ tel que :
      i. $\lambda(\mathrm{I}(x)) \ge 2\varepsilon$,
      ii. $\frac{1}{\lambda(\mathrm{I}(x))} \int_{\mathrm{I}(x)} |f| d\lambda > y$.

      Montrer que parmi les intervalles $\mathrm{I}(x)$, $x \in \mathrm{B}_{y,\varepsilon}$, ainsi obtenus, il en existe un nombre fini $\mathrm{I}(x_1), \ldots, \mathrm{I}(x_n)$ dont la réunion recouvre $\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$. [On pourra d'abord remarquer que $\mathrm{B}_{y,\varepsilon}$ est borné.]
   (b) Montrer que $\lambda(\mathrm{B}_{y,\varepsilon}) \le \frac{2}{y} \|f\|_1$. [Utiliser la question 2.]

   On définit maintenant f^* de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$f^*(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t)| dt. \tag{5.13}$$

5. Montrer que f^* est borélienne et que $\lambda(\{f^* > y\}) \le \frac{2}{y}\|f\|_1$, pour tout $y > 0$.
6. Montrer (5.11) si f admet un représentant continu. [Cette question n'utilise pas les questions précédentes.]
7. Montrer (5.11). [Approcher f, dans L^1 et p.p., par une suite d'éléments de $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$, notée $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser $(f - f_p)^*$.]

Exercice 5.14 (Convergence vague et convergence étroite) Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures (positives) finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ($d \ge 1$) et m une mesure (positive) finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que :

- $\int \varphi d m_n \to \int \varphi d m$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.
- $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to +\infty$.

1. Soit $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\int \varphi d m_n \to \int \varphi d m$, quand $n \to +\infty$. [On pourra utiliser le fait que φ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.]
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note B_p la boule fermée de centre 0 et de rayon p (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$). Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \subset \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \varphi_p \le 1$, $\varphi_p = 1$ sur B_p et $\varphi_p \le \varphi_{p+1}$. On utilise cette suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ dans les questions suivantes.
3. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $p \ge p_0 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) d m \le \varepsilon$.
   (b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int (1 - \varphi_p) d m_n \to \int (1 - \varphi_p) d m$ quand $n \to +\infty$.
   (c) Montrer qu'il existe $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n \in \mathbb{N}$, $p \ge p_1 \Rightarrow \displaystyle\int (1 - \varphi_p) d m_n \le \varepsilon$.
4. Montrer que $\int \varphi d m_n \to \int \varphi d m$, quand $n \to +\infty$, pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (on dit alors que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers m).
5. Indiquer brièvement comment obtenir le même résultat (c'est-à-dire le résultat de la question 4) si on remplace $\mathbb{R}^d$ (dans les hypothèses et dans la question 4) par "Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$".

Exercice 5.15 (Unicité avec C_c^∞) Soit m et μ deux mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). on suppose que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $m = \mu$.

Exercice 5.16 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1) Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (cela est démontré au chapitre 7, proposition 7.17) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x, K) = \inf\{|x-y|, y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact tels que $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|\varphi - 1_A\|_1 \leq \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ telle que $\|f - \psi\|_1 \leq \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.4. du polycopié de cours).]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 5.17 (Loi d'une fonction linéaire de X) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.. On suppose que la loi de X a une densité par rapport à Lebesgue et on note g cette densité.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$, montrer que la v.a. $aX + b$ a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et donner cette densité en fonction de g, a et b.