Chapitre 7

Produits d'espaces mesurés

7.1 Motivation

Au chapitre 2, on a introduit la mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), ce qui nous a permis d'exprimer la notion de longueur d'une partie (borélienne) de $\mathbb{R}$. On peut se poser la question de savoir s'il existe une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^2$ qui exprimerait la notion de surface (et une mesure sur une tribu convenable de $\mathbb{R}^3$ qui exprimerait la notion de volume...).

La question est donc : existe-t-il une mesure λ_2 sur une tribu de $\mathbb{R}^2$ contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\lambda_2(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A})\lambda(\mathrm{B}), \ \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ ?$$

La tribu T_2, sur laquelle on veut définir λ_2, doit donc contenir $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \times \mathrm{B}, \mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ n'est pas une tribu. En effet, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ n'est pas stable par passage au complémentaire ni par union (par contre, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est stable par intersection dénombrable). On définit alors T_2 comme la tribu engendrée par $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, qu'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

On cherche alors une mesure $\lambda_2 : \mathrm{T}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que $\lambda_2(\mathrm{A} \times \mathrm{B}) = \lambda(\mathrm{A})\lambda(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On peut montrer l'existence et l'unicité de la mesure λ_2 (voir le théorème 7.3). On peut aussi montrer que la tribu T_2 est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^2$ (voir la proposition 7.2).

Une autre question qu'on abordera dans ce chapitre concerne l'intégration des fonctions à plusieurs variables. Considérons par exemple une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Sous quelles hypothèses (faciles à vérifier...) peut-on écrire :

$$\int \Big(\int f(x,y)dy \Big) dx = \int \Big(\int f(x,y)dx \Big) dy \ ?$$

Une réponse à cette question est apportée par le théorème de Fubini, que nous verrons dans ce chapitre.

On introduira aussi le produit de convolution de deux fonctions, qui sera utile, par exemple, pour démontrer des théorèmes de densité. Mais la convolution est une notion utile pour beaucoup d'autres raisons (elle est utile, par exemple, en théorie du signal).

7.2 Mesure produit

On rappelle ici qu'un espace mesuré $(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$ est σ-fini (on dit aussi que m est σ-finie) s'il existe une famille $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{T}$ telle que $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$ et $m(\mathrm{A}_n) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ est σ-fini (prendre, par exemple, $A_n = [-n, n]$). Il existe par contre des mesures non σ-finies. L'exemple le plus simple sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ consiste à prendre $m(A) = +\infty$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Un exemple plus intéressant (intervenant pour certains problèmes) consiste à se donner un borélien non vide B de $\mathbb{R}$ (B peut être, par exemple, réduit à un point) et à définir m_B par $m_B(A) = +\infty$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B \neq \emptyset$ et $m_B(A) = 0$ si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7.1 (Tribu produit) *Soient* (E_1, T_1) *et* (E_2, T_2) *des espaces mesurables. On pose* $E = E_1 \times E_2$. *On appelle tribu produit la tribu sur* E *engendrée par* $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$. *Cette tribu produit est notée* $T_1 \otimes T_2$.

Un exemple fondamental est $(E_1, T_1) = (E_2, T_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On va montrer que, dans ce cas, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 7.2 (Tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout* $N \geq 2$, *on a* $\mathcal{B}(R^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(R^N)$.

DÉMONSTRATION – La démonstration est faite pour $N = 2$ dans l'exercice 2.6). Elle s'adapte facilement pour traiter aussi le cas $N > 2$ (exercice 7.1). ■

Théorème 7.3 (Mesure produit) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *deux espaces mesurés σ-finis,* $E = E_1 \times E_2$ *et* $T = T_1 \otimes T_2$. *Alors, il existe une et une seule mesure m sur* T *vérifiant :*

$$m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1) m_2(A_2),\ \forall (A_1, A_2) \in T_1 \times T_2; m_i(A_i) < \infty,\ i = 1, 2. \tag{7.1}$$

Cette mesure est notée $m = m_1 \otimes m_2$. *De plus, m est σ-finie.*

DÉMONSTRATION –

Existence de m. On va construire une mesure m sur T vérifiant (7.1).

Soit $A \in T$. On va montrer, à l'étape 1, que, pour tout $x_1 \in E_1$, on a $1_A(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$. On pourra donc poser $f_A(x_1) = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2$, pour tout $x_1 \in E_1$. L'application f_A sera donc une application de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On va montrer, à l'étape 2, que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$. On posera alors $m(A) = \int f_A dm_1$. Enfin, il restera à l'étape 3 à montrer que m est bien une mesure vérifiant (7.1) et que m est σ-finie.

Etape 1. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x_1 \in E_1$, on note $S(x_1, A) = \{x_2 \in E_2 ; (x_1, x_2) \in A\} \subset E_2$, de sorte que $1_A(x_1, \cdot) = 1_{S(x_1, A)}$.

Soit $x_1 \in E_1$. On pose $\Theta = \{A \in \mathcal{P}(E) ; S(x_1, A) \in T_2\}$.

On remarque tout d'abord que $\Theta \supset T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a $S(x_1, A) = A_2 \in T_2$ si $x_1 \in A_1$ et $S(x_1, A) = \emptyset \in T_2$ si $x_1 \notin A_1$.

On remarque ensuite que Θ est une tribu. En effet :

- $\emptyset \in \Theta$ car $S(x_1, \emptyset) = \emptyset \in T_2$,
- Θ est stable par passage au complémentaire. En effet : $S(x_1, A^c) = (S(x_1, A))^c$ (c'est-à-dire $S(x_1, E \setminus A) = E_2 \setminus S(x_1, A)$). On a donc $S(x_1, A^c) \in T_2$ si $A \in \Theta$, ce qui prouve que $A^c \in \Theta$.
- Θ est stable par union dénombrable. Il suffit de remarquer que $S(x_1, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^{(n)}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \in T_2$ si $(A^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset \Theta$.

L'ensemble Θ est donc une tribu contenant $T_1 \times T_2$, et contient donc $T_1 \otimes T_2 = T$, tribu engendrée par $T_1 \times T_2$. . On a donc $S(x_1, A) \in T_2$ pour tout $A \in T$.

Pour tout $A \in T$, on peut donc définir une application f_A de E_1 dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant, pour $x_1 \in E_1$,

$$f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \int 1_{S(x_1,A)} dm_2 = \int 1_A(x_1, \cdot) dm_2 \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{7.2}$$

Etape 2. Dans cette étape, on démontre que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Cette étape est plus difficile que la précédente.

On note $\Sigma = \{A \in T\ ;\ f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)\}$ et on va montrer que $\Sigma \supset T$ et donc que $\Sigma = T$.

On suppose d'abord que m_2 est finie.

Il est facile de voir que Σ contient $T_1 \times T_2$. En effet, si $A = A_1 \times A_2$ avec $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$, on a alors $f_A = m_2(A_2) 1_{A_1} \in \mathcal{E}_+(E_1, T_1) \subset \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On note maintenant $\mathcal{A}$ l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ ($\mathcal{A}$ s'appelle l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, voir l'exercice 7.2). Si $A \in \mathcal{A}$, il existe donc $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ tel que $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^n A^{(p)}$. On a alors $f_A(x_1) = m_2(S(x_1, A)) = \sum_{p=1}^n m_2(S(x_1, A^{(p)})) = \sum_{p=1}^n f_{A^{(p)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $A^{(p)} \in T_1 \times T_2 \subset \Sigma$. On a donc $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

On montre maintenant que Σ est une classe monotone, c'est-à-dire que :

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \subset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma \tag{7.3}$$

et

$$(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ A^{(n)} \supset A^{(n+1)}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma. \tag{7.4}$$

Pour démontrer (7.3), on considère une suite $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ telle que $A^{(n)} \subset A^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Soit $x_1 \in E_1$; on a $(S(x_1, A^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ (par l'étape 1, car $\Sigma \subset T$), $S(x_1, A^{(n)}) \subset S(x_1, A^{(n+1)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$S\left(x_1, \cup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}).$$

On en déduit, par continuité croissante de m_2, que

$$m_2(S(x_1, A)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$$

et donc que $f_A = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}$, ce qui prouve que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ car $f_{A^{(n)}} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)} \in \Sigma$.

La démonstration de (7.4) est similaire, il faut utiliser la continuité décroissante de m_2 au lieu de la continuité croissante. C'est pour utiliser la continuité décroissante de m_2 qu'on a besoin du fait que m_2 est finie.

On a ainsi montré que Σ est une classe monotone contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. On peut en déduire (cela fait l'objet de l'exercice 2.13) que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc aussi la tribu engendrée par $T_1 \times T_2$ (car $T_1 \times T_2 \subset \mathcal{A}$), c'est-à-dire que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$. On a bien montré, finalement, que $\Sigma = T$.

Il reste maintenant à montrer que $\Sigma = T$ sans l'hypothèse m_2 finie. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ telle que $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la mesure $m_2^{(n)}$ par $m_2^{(n)}(A_2) = m_2(A_2 \cap F_n)$ pour tout $A_2 \in T_2$. La mesure $m_2^{(n)}$ est finie, l'étape 1 et la première partie de l'étape 2 donne donc que, pour tout $A \in T$, $f_A^{(n)} \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ où $f_A^{(n)}$ est définie par 7.2 avec $m_2^{(n)}$ au lieu de m_2 (c'est-à-dire $f_A^{(n)}(x_1) = m_2^{(n)}(S(x_1, A))$ pour tout $x_1 \in E_1$). On conclut alors en remarquant que $f_A^{(n)} \uparrow f_A$ quand $n \to +\infty$, ce qui donne que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$.

On a donc montré que $f_A \in \mathcal{M}_+(E_1, T_1)$ pour tout $A \in T$. Ceci nous permet de définir $m : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ par :

$$m(A) = \int f_A dm_1, \text{ pour tout } A \in T. \tag{7.5}$$

Etape 3. Dans cette étape, on montre que m, définie par (7.5), est une mesure sur T et que m vérifie (7.1) et est σ-finie.

On montre d'abord que m est bien une mesure sur T :

- $m(\emptyset) = 0$ car $f_\emptyset(x_1) = m_2(S(x_1, \emptyset)) = m_2(\emptyset) = 0$.
- (σ-additivité de m) Soit $(A^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T$ telle que $A^{(n)} \cap A^{(m)} = \emptyset$ si $n \neq m$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$. Pour $x_1 \in E_1$, on a :

  $$S(x_1, A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(x_1, A^{(n)}) \text{ et } S(x_1, A^{(n)}) \cap S(x_1, A^{(m)}) = \emptyset \text{ si } n \neq m.$$

  La σ-additivité de m_2 donne alors $m_2(S(x_1, A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_2(S(x_1, A^{(n)}))$, c'est-à-dire

  $$f_A(x_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{A^{(n)}}(x_1).$$

  Le premier corollaire du théorème de convergence monotone (corollaire 4.18) donne alors :

  $$m(A) = \int f_A dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_{A^{(n)}} dm_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}),$$

  ce qui donne la σ-additivité de m.

On montre maintenant que m vérifie (7.1). Soient $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ tels que $m_1(A_1) < \infty$ et $m(A_2) < \infty$. On pose $A = A_1 \times A_2$. On a alors $f_A = m_2(A_2)1_{A_1}$ et donc $m(A) = \int f_A dm_1 = m_2(A_2)m_1(A_1)$.

Il reste à vérifier que m est σ-finie. Comme m_1 et m_2 sont σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ tels que $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $C_{n,m} = B_1^{(n)} \times B_2^{(m)}$, de sorte que $E = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} C_{n,m}$ et $m(C_{n,m}) = m_1(B_1^{(n)}) \times m_2(B_2^{(m)}) < \infty$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, on en déduit que m est σ-finie.

Unicité de m.

La partie existence de la démonstration donne une mesure m sur T vérifiant (7.1). La partie unicité du théorème peut se montrer avec la proposition 2.31 ; nous développons cette méthode ci-après, ou avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13) comme cela est expliqué dans la remarque 7.4.

Soit m et μ deux mesures sur T vérifiant (7.1). Pour montrer que $m = \mu$, on va appliquer la proposition 2.31. On pose :

$$\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2, A_1 \in T_1, A_2 \in T_2, m_1(A_1) < \infty, m_2(A_2) < \infty\}.$$

Comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il est facile de montrer que tout élément de $T_1 \times T_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}$ engendre T. Il est clair que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et, par (7.1), on a $m = \mu$ sur $\mathcal{C}$. Puis, comme m_1 et m_2 sont σ−finies, il existe deux suites $(E_{1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(E_{2,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ d'éléments de T_1 et T_2, disjoints deux à deux et t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{1,n}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{2,n}$ et $m_i(E_{i,n}) < \infty$ pour tout $i \in \{1, 2\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on pose $F_{n,m} = E_{1,n} \times E_{2,m}$. La famille $(F_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, disjoints deux à deux et t.q. $E = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} F_{n,m}$ et $m(F_{n,m}) = m_1(E_{1,n})m_2(E_{1,m}) < \infty$. On peut alors utiliser la Proposition 2.31. Elle donne $m = \mu$ sur T et termine la démonstration du théorème. ■

Remarque 7.4 Comme cela a été dit, un autre moyen de montrer la partie unicité du théorème précédent est d'utiliser le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Supposons tout d'abord que m_1 et m_2 sont finies. On a alors (par (7.1)) :

$$m(E) = \mu(E) = m_1(E_1)m_2(E_2) < \infty.$$

La condition (7.1) donne également que $m = \mu$ sur $T_1 \times T_2$. On a alors aussi $m = \mu$ sur l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$, notée $\mathcal{A}$ (cette algèbre a été définie dans la partie existence de la démonstration). En effet, si $A \in \mathcal{A}$, il existe $(A^{(p)})_{p=1,...,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$. On a alors, par additivité de m et μ, $m(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A^{(n)}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A^{(n)}) = \mu(A)$.
On pose maintenant $\Sigma = \{A \in T\,;\, m(A) = \mu(A)\}$. On vient de montrer que $\Sigma \supset \mathcal{A}$. Il est d'autre part facile de voir que Σ est une classe monotone. En effet, les propriétés de continuité croissante et de continuité décroissante appliquées à m et μ permettent facilement de vérifier (7.3) et (7.4) (on utilise ici, pour montrer (7.4), que m et μ sont des mesures finies). Comme dans la partie existence de la démonstration, l'exercice 2.13 donne alors que Σ contient la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ et donc que Σ contient $T = T_1 \otimes T_2$, ce qui donne $\Sigma = T$ et donc $m = \mu$.

Dans le cas où m_1 et m_2 ne sont pas finies, mais σ-finies, il existe $(B_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_1$ et $(B_2^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $E_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_1^{(n)}$, $E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_2^{(n)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_1(B_1^{(n)}) < \infty$ et $m_2(B_2^{(n)}) < \infty$. On peut également supposer que $B_1^{(n)} \subset B_1^{(n+1)}$ et $B_2^{(n)} \subset B_2^{(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (il suffit, par exemple, de remplacer $B_i^{(n)}$ par $\bigcup_{p=0}^{n} B_i^{(p)}$). Par un raisonnement analogue à celui fait dans le cas où m_1 et m_2 sont finies, on peut montrer que $m = \mu$ sur $\{A \in T\,;\, A \subset B_1^{(n)} \times B_2^{(n)}\}$. On conclut alors, en utilisant la propriété de continuité croissante, que $m = \mu$ sur T.

Remarque 7.5 Dans le théorème précédente (théorème 7.3), on peut aussi remarquer que :

1. $m(A_1 \times A_2) = m_1(A_1)m_2(A_2) = \infty$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) \neq 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) \neq 0$),
2. $m(A_1 \times A_2) = 0$ si $A_1 \in T_1$ et $A_2 \in T_2$ avec $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$ (ou avec $m_1(A_1) = \infty$ et $m_2(A_2) = 0$).

En effet, on suppose par exemple que $m_1(A_1) = 0$ et $m(A_2) = \infty$. Comme m_2 est σ-finie, on peut construire une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T_2$ t.q. $F_n \subset F_{n+1}$ et $m_2(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors, par continuité croissante de m, $m(A_1 \times A_2) = \lim_{n\to+\infty} m(A_1 \times (A_2 \cap F_n)) = \lim_{n\to+\infty} m_1(A_1)m_2(A_2 \cap F_n) = 0$ (on a d'ailleurs aussi $m_2(A_2 \cap F_n) \uparrow \infty$, ce qui permet de conclure si $0 < m_1(A_1) < \infty$ que $m(A_1 \times A_2) = \infty$). Les autres cas se traitent de manière analogue.

Définition 7.6 (Espace produit)
L'espace (E, T, m)*, construit dans le théorème 7.3, s'appelle l'espace (mesuré) produit des espaces* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2).

Un exemple fondamental d'espace produit est l'espace $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ pour $N \geq 2$ que nous verrons dans la section 7.4.

7.3 Théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini

Théorème 7.7 (Fubini-Tonelli) *Soient* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis. On note* (E, T, m) *l'espace produit (donc,* $T = T_1 \otimes T_2$ *et* $m = m_1 \otimes m_2$*). Soit* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *une fonction mesurable positive (i.e.* T*-mesurable positive). Alors :*

1. $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2, T_2)$ *pour tout* $x_1 \in E_1$*,*

on pose

$$\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot)dm_2 = \int f(x_1, x_2)dm_2(x_2) \text{ pour tout } x_1 \in E_1,$$

de sorte que $\varphi_f : \mathrm{E}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

2. $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$,
3. $\int f dm = \int \varphi_f dm_1 = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1)$,
4. *les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de* m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1, x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – la démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. Soit $f = 1_\mathrm{A}$, $\mathrm{A} \in \mathrm{T}$. La partie existence de m de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $\int f dm = m(\mathrm{A}) = \int \varphi_f dm_1$.

Plus précisément, on a, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f(x_1, \cdot) = 1_\mathrm{A}(x_1, \cdot) = 1_{\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A})}$, avec

$$\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}) = \{x_2 \in \mathrm{E}_2 \text{ t.q. } (x_1, x_2) \in \mathrm{A}\} \subset \mathrm{E}_2$$

(comme dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 1 de la démonstration (de la partie existence) du théorème 7.3 donne que $\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}) \in \mathrm{T}_2$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, et donc $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Ceci donne le premier item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2 = m_2(\mathrm{S}(x_1, \mathrm{A}))$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$. (Cette fonction φ_f est notée f_A dans la démonstration du théorème 7.3). L'étape 2 de la démonstration du théorème 7.3 donne que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$. Ceci donne le deuxième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

On a alors posé, dans la démonstration du théorème 7.3, $m(\mathrm{A}) = \int \varphi_f dm_1$ et l'étape 3 a montré que m est une mesure sur T vérifiant (7.1) (et la seule mesure sur T vérifiant (7.1), d'après la partie unicité de la démonstration du théorème 7.3). Ceci donne le troisième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de remarquer que l'on peut inverser les rôles de m_1 et m_2 dans la démonstration du théorème 7.7. On obtient ainsi que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$. On pose alors $\psi_f(x_2) = \int f(\cdot, x_2) dm_1$. On obtient que $\psi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Enfin, on pose $\tilde{m}(\mathrm{A}) = \int \psi_f dm_2$ et on obtient que $\tilde{m}$ est une mesure sur T vérifiant (7.1). La partie unicité de la démonstration du théorème 7.3 donne alors que $m = \tilde{m}$, ce qui est exactement le quatrième item (pour $f = 1_\mathrm{A}$) de la conclusion du théorème 7.7.

Etape 2. On prend maintenant $f \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$.
Il existe donc $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$ t.q. $f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}$.

On a alors, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f(x_1, \cdot) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{\mathrm{A}_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ car l'étape 1 donne $1_{\mathrm{A}_i}(x_1, \cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ pour tout i. Ce qui donne le premier item de la conclusion du théorème 7.7.

On pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1, \cdot) dm_2$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$. On a $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ car $\varphi_f = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{\mathrm{A}_i}}$ et que $\varphi_{1_{\mathrm{A}_i}} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ pour tout i (d'après l'étape 1), ce qui donne le deuxième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, on utilise la linéarité de l'intégrale et l'étape 1 pour $f = 1_{\mathrm{A}_i}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(\mathrm{A}_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int \varphi_{1_{\mathrm{A}_i}} dm_1 &= \int (\sum_{i=1}^n a_i \varphi_{1_{\mathrm{A}_i}}) dm_1 \\
= \int \Big(\sum_{i=1}^n a_i \int 1_{\mathrm{A}_i}(x_1, \cdot) dm_2 \Big) dm_1(x_1) &= \int \Big(\int f(x_1, \cdot) dm_2 \Big) dm_1(x_1) \\
&= \int \varphi_f dm_1.
\end{aligned}$$

Ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2.

Etape 3. On peut enfin prendre $f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ t.q. $f_n \uparrow f$ quand $n \to +\infty$.

On a donc, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f_n(x_1,\cdot) \uparrow f(x_1,\cdot)$ quand $n \to +\infty$. On en déduit que $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ car (d'après l'étape 2) $f_n(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qui donne le premier item).

Le théorème de convergence monotone (pour m_2) donne que

$$\varphi_{f_n}(x_1) = \int f_n(x_1,\cdot)dm_2 \uparrow \int f(x_1,\cdot)dm_2 = \varphi_f(x_1)$$

pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$. Donc, $\varphi_{f_n} \uparrow \varphi_f$. Comme $\varphi_{f_n} \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ (d'après l'étape 2), on en déduit que $\varphi_f \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ (ce qui donne le deuxième item).

On applique maintenant le théorème de convergence monotone pour m_1 et pour m, ils donnent :

$$\int \varphi_{f_n} dm_1 \uparrow \int \varphi_f dm_1 \text{ et } \int f_n dm \uparrow \int f dm \text{ quand } n \to +\infty.$$

L'étape 2 donne $\int f_n dm = \int \varphi_{f_n} dm_1$, on en déduit donc que $\int f dm = \int \varphi_f dm_1$, ce qui donne le troisième item de la conclusion du théorème 7.7.

Enfin, ici encore, pour avoir le quatrième item de la conclusion du théorème 7.7, il suffit de changer les rôles de m_1 et m_2. ■

Corollaire 7.8 *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$ *des espaces mesurés σ-finis. On note* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *l'espace produit. Soit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable. Alors :*

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{T},m) \Leftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_2 \Big) dm_1 < +\infty \Leftrightarrow \int \Big(\int |f| dm_1 \Big) dm_2 < +\infty. \tag{7.6}$$

Démonstration – Le corollaire découle immédiatement du théorème 7.7 appliqué à la fonction $|f|$ qui appartient à $\mathcal{M}_+(\mathrm{E},\mathrm{T})$. Dans (7.6), la notation $(\int |f| dm_2) dm_1$ signifie :

$$\Big(\int |f(x_1,x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1).$$

La notation est similaire en inversant les rôles de m_1 et m_2. ■

Voici une conséquence immédiate du théorème 7.7 pour la mesurabilité :

Proposition 7.9 *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ *deux espaces mesurables. On pose* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. *Soit* $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ *(c'est-à-dire* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$, T*-mesurable). Alors :*

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$, *pour tout* $x_1 \in \mathrm{E}_1$,
2. $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$, *pour tout* $x_2 \in \mathrm{E}_2$.

Démonstration – La démonstration est facile, il suffit de remarquer que $f = f^+ - f^-$ et que $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}, \mathrm{T})$. Le premier item de la conclusion du théorème 7.7 donne alors, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $f^+(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ et $f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Comme $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot)$, on en déduit que $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. En changeant les rôles de $(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$, on montre aussi que $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$, pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$. ■

Remarque 7.10 La réciproque de la proposition précédente est fausse. Soient $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ deux espaces mesurables, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ et $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ t.q.

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$, pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$,

2. $f(\cdot,x_2) \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$, pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$.

Alors, f n'est pas forcément T-mesurable. Un exemple est donné dans l'exercice 7.4. Un cas particulier intéressant pour laquelle cette réciproque est vraie est donné par la proposition 7.11.

Proposition 7.11 *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$ *deux espaces mesurables. On pose* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2$. *Soient* $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ *et* $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$. *On définit* $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ *par* $f(x_1,x_2) = \mathrm{F}_1(x_1)\mathrm{F}_2(x_2)$ *pour tout* $(x_1,x_2) \in \mathrm{E}$. *Alors* f *est* T*-mesurable (c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$*).*

DÉMONSTRATION – On procède en trois étapes.

Etape 1. On prend d'abord $\mathrm{F}_1 = 1_{\mathrm{A}_1}$ et $\mathrm{F}_2 = 1_{\mathrm{A}_2}$ avec $\mathrm{A}_1 \in \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_2$. On a alors $f = 1_{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2} \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$ car $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \in \mathrm{T}_1 \times \mathrm{T}_2 \subset \mathrm{T}_1 \otimes \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}$.

Etape 2. On prend maintenant $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{E}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1)$ et $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{E}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2)$.

Il existe alors $a_1^{(1)},\ldots,a_n^{(1)} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A}_1^{(1)},\ldots,\mathrm{A}_n^{(1)} \in \mathrm{T}_1$, $a_1^{(2)},\ldots,a_m^{(2)} \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A}_1^{(2)},\ldots,\mathrm{A}_m^{(2)} \in \mathrm{T}_2$ t.q. :

$$\mathrm{F}_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \mathrm{A}_i^{(1)} \text{ et } \mathrm{A}_i^{(1)} \cap \mathrm{A}_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } i \neq k,$$

$$\mathrm{F}_2 = \sum_{j=1}^{m} a_j^{(2)} \mathrm{A}_j^{(2)} \text{ et } \mathrm{A}_j^{(2)} \cap \mathrm{A}_k^{(1)} = \emptyset \text{ si } j \neq k.$$

On a alors $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i^{(1)} a_j^{(2)} 1_{\mathrm{A}_i^{(1)} \times \mathrm{A}_j^{(2)}} \in \mathcal{E}(\mathrm{E},\mathrm{T}) \subset \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$.

Etape 3. On prend enfin $\mathrm{F}_1 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ et $\mathrm{F}_2 \in \mathcal{M}(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$. Il existe $(\mathrm{F}_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(\mathrm{E}_1, \mathrm{T}_1)$ et $(\mathrm{F}_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathcal{E}(\mathrm{E}_2, \mathrm{T}_2)$ t.q. $\mathrm{F}_n^{(1)}(x_1) \to \mathrm{F}_1(x_1)$ pour tout $x_1 \in \mathrm{E}_1$ et $\mathrm{F}_n^{(2)}(x_2) \to \mathrm{F}_2(x_2)$ pour tout $x_2 \in \mathrm{E}_2$. On en déduit que $f_n(x_1,x_2) = \mathrm{F}_n^{(1)}(x_1)\mathrm{F}_n^{(2)}(x_2) \to f(x_1,x_2)$ pour tout $(x_1,x_2) \in \mathrm{E}$ et donc que $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ car $f_n \in \mathcal{M}(\mathrm{E}, \mathrm{T})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (étape 2). ■

Théorème 7.12 (Fubini) *Soient* $(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *et* $(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$ *des espaces mesurés σ-finis. On note* $(\mathrm{E},\mathrm{T},m)$ *l'espace produit. Soit* f *une fonction* T*-mesurable de* E *dans* $\mathbb{R}$ *(c'est-à-dire* $f \in \mathcal{M}(\mathrm{E},\mathrm{T})$*) et intégrable pour la mesure m, c'est-à-dire* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}, \mathrm{T}, m)$*. Alors :*

1. $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$ *pour presque tout* $x_1 \in \mathrm{E}_1$,

on pose $\varphi_f(x_1) = \int f(x_1,\cdot)dm_2$ *pour* $x_1 \in \mathrm{E}_1$ *t.q.* $f(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_2,\mathrm{T}_2,m_2)$*. La fonction* φ_f *est donc définie p.p. sur* E_1 *(et à valeurs dans* $\mathbb{R}$*).*

2. $\varphi_f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *(au sens : il existe* $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathrm{E}_1,\mathrm{T}_1,m_1)$ *t.q.* $f = g$ *p.p.).*

3. $\displaystyle\int f\,dm = \int \varphi_f\,dm_1 = \int \Big(\int f(x_1,x_2)dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1)$,

4. les mêmes résultats sont vrais en inversant les rôles de m_1 *et* m_2*, de sorte que :*

$$\int \Big(\int f(x_1,x_2)dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1,x_2)dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

DÉMONSTRATION – Comme $f \in \mathcal{M}(E,T)$, on a $f^+, f^- \in \mathcal{M}_+(E,T)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) à f^+ et f^-. Il donne :

1. $f^+(x_1,\cdot), f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}_+(E_2,T_2)$, pour tout $x_1 \in E_1$,
2. $\varphi_{f^+}, \varphi_{f^-} \in \mathcal{M}_+(E_1,T_1)$ avec $\varphi_{f^\pm}(x_1) = \int f^\pm(x_1,\cdot)dm_2$ pour tout $x_1 \in E_1$.
3. $\int f^\pm dm = \int \varphi_{f^\pm} dm_1$.

Le premier item donne que $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{M}(E_2,T_2)$ (noter que f, f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Comme $\int f^+ dm < \infty$ et $\int f^- dm < \infty$ (car $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E, T, m)$), le troisième item donne que $\varphi_{f^+} < \infty$ p.p. (sur E_1) et que $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p. (sur E_1). On a donc $f^+(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2,T_2,m_2)$ et $f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2,T_2,m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. On en déduit donc que $f(x_1,\cdot) = f^+(x_1,\cdot) - f^-(x_1,\cdot) \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_2,T_2,m_2)$ pour presque tout $x_1 \in E_1$. Ce qui donne le premier item de la conclusion.

La fonction φ_f est donc définie p.p. sur E_1 et on a $\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ p.p. (on a $\varphi_f(x_1) = \varphi_{f^+}(x_1) - \varphi_{f^-}(x_1)$ en tout point x_1 t.q. $\varphi_{f^+}(x_1) < \infty$ et $\varphi_{f^-}(x_1) < \infty$). Comme $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ p.p, on peut trouver $A \in T_1$ t.q. $m_1(A) = 0$ et $\varphi_{f^+} < \infty$ et $\varphi_{f^-} < \infty$ sur $A^c = E_1 \setminus A$. En posant $g = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}$ sur A^c et $g = 0$ sur A, on a donc $g \in \mathcal{M}(E_1,T_1)$, $g = \varphi_f$ p.p. et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E_1,T_1,m_1)$ car $\int |g| dm_1 \le \int \varphi_{f^+} dm_1 + \int \varphi_{f^-} dm_1 < \infty$. Ceci donne le deuxième item de la conclusion (le fait que φ_f appartienne à $L^1_{\mathbb{R}}(E_1,T_1,m_1)$) et donne aussi le troisième item car :

$$\begin{aligned}\int \varphi_f dm_1 &= \int g dm_1 = \int \varphi_{f^+} dm_1 - \int \varphi_{f^-} dm_1\\ &= \int f^+ dm - \int f^- dm = \int f dm.\end{aligned}$$

Enfin, comme pour le théorème de Fubini-Tonelli, le quatrième item de la conclusion s'obtient en changeant les rôles de m_1 et m_2. ■

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous la forme du corollaire suivant :

Corollaire 7.13 *Soit* (E_1, T_1, m_1) *et* (E_2, T_2, m_2) *des espaces mesurés σ-finis,* (E, T, m) *l'espace produit et* $f : E \to \mathbb{R}$ *une fonction* T*-mesurable t.q. :*

$$\int \Big(\int |f(x_1,x_2)| dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) < +\infty$$

ou

$$\int \Big(\int |f(x_1,x_2)| dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

$$\int \Big(\int f(x_1,x_2) dm_2(x_2) \Big) dm_1(x_1) = \int \Big(\int f(x_1,x_2) dm_1(x_1) \Big) dm_2(x_2).$$

(Toutes les intégrales ayant bien un sens.)

DÉMONSTRATION – Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 7.12 et de l'équivalence (7.6). ■

Remarque 7.14 (Contre-exemple lié au théorème de Fubini) On cherche ici à construire une fonction pour laquelle la conclusion du théorème de Fubini n'est pas vérifiée. Soit a une fonction (continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = a(x)$ si $x \ge 0$ et $x \le y < 2x$, $f(x,y) = -a(x)$ si $x \ge 0$ et $2x \le y < 3x$, $f(x,y) = 0$ si $x < 0$ ou $x \ge 0$ et $y \notin [x,3x]$. On pose $b(x) = x a(x)$. On peut montrer que les hypothèses du théorème de Fubini ne sont vérifiées que si $b \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. En prenant par exemple $a(x) = 1/(1+x)^2$, on montre que $\int(\int f(x,y)dy)dx \neq \int(\int f(x,y)dx)dy$ (voir l'exercice 7.5).

7.4 Mesure de Lebesgue sur la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^N$

On a déjà vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $N \geq 1$ (exercice 2.6 pour $N = 2$ et exercice 7.1). Le paragraphe précédent permet alors de définir la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^N$ (c'est-à-dire sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^N$) pour tout $N \geq 1$.

Définition 7.15 (Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$)

1. La mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la mesure $\lambda \otimes \lambda$, on la note λ_2.

2. Par récurrence sur N, la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, est la mesure $\lambda_{N-1} \otimes \lambda$, on la note λ_N.

On note $L^1(\mathbb{R}^N)$ l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on note

$$\int f(x) d\lambda_N(x) = \int f(x) dx.$$

On donne maintenant quelques propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Il s'agit de propriétés élémentaires ou de généralisations simples de propriétés vues pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Les démonstrations seront proposées en exercices.

Proposition 7.16 (Propriétés élémentaires de λ_N)
Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. La mesure λ_N est σ-finie.

2. Soit $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i).$$

3. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Alors :

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^N]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N \lambda(]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^N (\beta_i - \alpha_i).$$

4. Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Alors, $\lambda_N(K) < +\infty$.

5. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Alors, $\lambda_N(O) > 0$.

6. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

7. $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. (En confondant f avec sa classe, on écrira donc souvent $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$.)

Démonstration – Comme λ_N est une mesure produit, le fait que λ_N est σ-finie est (par récurrence sur N) une conséquence du théorème donnant l'existence (et l'unicité) de la mesure produit (théorème 7.3) car ce théorème donne que le produit de mesures σ-finies est σ-finie.

La démonstration des autres propriétés fait l'objet de l'exercice 7.10. ■

Une propriété très importante de λ_N est sa régularité, c'est-à-dire que pour tout élément A de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda_N(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

Cette propriété est une conséquence du fait que toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts, est régulière (proposition 7.17).

Proposition 7.17 (Régularité d'une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts) *Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (Noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.) Alors :*

1. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

2. Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a $m(A) = \inf\{m(O), O \text{ ouvert t.q. } A \subset O\}$.

DÉMONSTRATION – Cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.11. ■

On donne maintenant des généralisations au cas de λ_N de propriétés déjà vues pour λ.

Proposition 7.18 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Pour tout $N \geq 1$, l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).*

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 7.13, elle découle essentiellement de la régularité de λ_N. Cette démonstration est très voisine de celle faite pour le cas N = 1, théorème 5.20. ■

Comme cela a déjà été dit après le théorème 5.20, le résultat de densité que nous venons d'énoncer n'est pas limité à la mesure de Lebesgue. Il est vrai pour toute mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Il est aussi vrai en remplaçant C_c par C_c^∞. On obtient donc le théorème suivant :

Théorème 7.19 (Densité de C_c^∞ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$) *Soit $N \geq 1$ et μ sur une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, finie sur les compacts. Alors, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$).*

La démonstration de ce théorème fait l'objet de l'exercice 7.14.

Proposition 7.20 (Invariance par translation) *Soient $N \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (noter que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$). Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on a alors $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$.*

Pour $\alpha_i = 1$ pour tout i, cette propriété s'appelle invariance par translation de λ_N.

DÉMONSTRATION – Cette proposition a déjà été vue pour N = 1, proposition 2.48. La démonstration de la proposition 2.48 utilisait, par exemple, le fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux (et la régularité de λ). La démonstration proposée ici pour $N \geq 1$ utilise une récurrence sur N et la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit. Elle fait l'objet de l'exercice 7.15.

On peut aussi noter que la partie unicité du théorème 7.3 peut être faite (voir la remarque 7.4) avec le lemme des classes monotones (exercice 2.13). Ce lemme pourrait aussi être utilisé pour démontrer la proposition 2.48 (au lieu du théorème de régularité et du fait que tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints deux à deux). ■

Proposition 7.21 (Changement de variables simple)
Soient $\mathrm{N} \geq 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mathrm{N} \in \mathbb{R}^*$ *et* $\beta_1, \ldots, \beta_\mathrm{N} \in \mathbb{R}$.
Pour $x = (x_1, \ldots, x_\mathrm{N})^t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, *on pose* $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_\mathrm{N} x_\mathrm{N} + \beta_\mathrm{N})^t$ *(de sorte que* φ *est une bijection de* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ *dans* $\mathbb{R}^\mathrm{N}$*). Alors :*

1. Pour tout $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}))$, *on a* $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ *et :*

$$\int f d\lambda_\mathrm{N} = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_\mathrm{N}.$$

2. Pour tout $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$, *on a* $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ *et :*

$$\int f d\lambda_\mathrm{N} = \prod_{i=1}^{\mathrm{N}} |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_\mathrm{N}.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration est une conséquence simple de la proposition 7.20. Elle fait l'objet de l'exercice 7.16.

Noter aussi que $\prod_{i=1}^{\mathrm{N}} |\alpha_i|$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ au point x. Cette matrice est notée $\mathrm{D}\varphi(x)$, elle ne dépend pas de x pour les applications considérées dans cette proposition. Cette proposition sera généralisée au théorème 7.29. ■

7.5 Convolution

On rappelle que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ et que, pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, $\int f d\lambda_\mathrm{N} = \int f(x) d\lambda_\mathrm{N}(x) = \int f(x) dx$ (c'est-à-dire que dx signifie toujours $d\lambda_\mathrm{N}(x)$).
On note aussi $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$.
Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On souhaite définir la fonction convoluée de f et g, c'est-à-dire définir $f * g$ par :

$$f * g(x) = \int f(t) g(x-t) dt.$$

La définition de cette fonction nécessite les deux conditions suivantes :

1. Il faut que la définition ne dépende pas des représentants choisis pour f et g.
2. Il faut que, ayant choisi des représentants pour f et g, encore notés f et g, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartienne à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $g(x-\cdot)f(\cdot) = h$ p.p."). Ceci n'est pas immédiat car, en général, le produit deux fonctions intégrables n'est pas une fonction intégrable.

La condition 1 est satisfaite, car, pour $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, si f, f_1, g et g_1 sont des fonctions de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$f = f_1 \text{ p.p.}, \ g = g_1 \text{ p.p.} \Rightarrow f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot) \text{ p.p..} \tag{7.7}$$

(p.p. signifiant ici λ_N-p.p..) En effet, il suffit de remarquer que si $f = f_1$ p.p. et $g = g_1$ p.p., il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) = \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{B}) = 0$, $f = f_1$ sur A^c et $g = g_1$ sur B^c. Pour $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, on a alors $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ sur $\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}_x^c = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}_x)^c$ avec $\mathrm{B}_x = \{x - z, z \in \mathrm{B}\}$. On en déduit bien $f(\cdot)g(x-\cdot) = f_1(\cdot)g_1(x-\cdot)$ p.p. car $\lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}_x) \leq \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) + \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{B}_x) = \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{A}) + \lambda_\mathrm{N}(\mathrm{B}) = 0$ (on utilise ici la propriété d'invariance par translation donnée dans la proposition 7.20).

On en déduit que, si f et f_1 [resp. g et g_1] sont des représentants d'un même élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a $f(.)g(x-.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ si et seulement si $f_1(.)g_1(x-.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et, si $f(.)g(x-.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a $\int f(t)g(x-t)dt = \int f_1(t)g_1(x-t)dt$.

On montre dans la proposition suivante que la condition 2 est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Proposition 7.22 (Convolution) *Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (que l'on confond avec l'un de leurs représentants). Alors :*

- *Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, la fonction $g(x-\cdot)f(\cdot)$ appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (en la confondant avec sa classe). On pose donc : $f * g(x) = \displaystyle\int f(t)g(x-t)dt$. La fonction $f * g$ est donc définie p.p. sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$.*
- *$f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ t.q. $f * g = h$ p.p.").*
- *$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.*

DÉMONSTRATION – On donne la démonstration pour $\mathrm{N} = 1$ (le cas $\mathrm{N} > 1$ est similaire, en ayant d'abord montré que $\lambda_{2\mathrm{N}} = \lambda_\mathrm{N} \otimes \lambda_\mathrm{N}$).

On choisit des représentants de f et g, de sorte que $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On souhaite appliquer le théorème de Fubini (théorème 7.12) à $\mathrm{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{H}(x,y) = f(y)g(x-y)$, avec les espaces mesurés $(\mathrm{E}_i, \mathrm{T}_i, m_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Comme λ est σ-finie, pour appliquer le théorème de Fubini, il suffit de vérifier que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable et que $\int(\int |\mathrm{H}(x,y)|dx)dy < \infty$.

On montre d'abord que H est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-mesurable. On a $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 \circ \psi$ avec :

$$\mathrm{H}_1 \ : \ (x,y) \mapsto f(x)g(y), \ \ \psi \ : \ (x,y) \mapsto (y, x-y).$$

La fonction H_1 est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (car f et g sont mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on applique ici la proposition 7.11) et ψ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ car continue ($\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont toujours munis de leur tribu borélienne). La fonction H est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions mesurables. On peut maintenant calculer l'intégrale de $|\mathrm{H}|$:

$$\int (\int |\mathrm{H}(x,y)|dx)dy = \int (\int |f(y)g(x-y)|dx)dy = \int |f(y)|(\int |g(x-y)|dx)dy.$$

La proposition 7.21 donne $\int |g(x-y)|dx = \int |g(x)|dx = \|g\|_1$, Donc :

$$\int (\int |\mathrm{H}(x,y)|dx)dy = \|g\|_1 \int |f(y)|dy = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Le théorème de Fubini peut donc s'appliquer. Il donne que $\mathrm{H}(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, $g(x-\cdot)f(\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci montre bien que $f * g$ est définie p.p.. Le théorème de Fubini donne alors aussi que $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (au sens "il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ t.q. $f * g = h$ p.p.").

Enfin pour montrer que $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$, il suffit de remarquer que :

$$\|f * g\|_1 = \int |\int f(y)g(x-y)dy|dx \le \int (\int |\mathrm{H}(x,y)|dx)dy = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

■

Remarque 7.23 On a vu précédemment que $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ muni de l'addition (loi de composition interne), de la multiplication par un scalaire (loi de composition externe) et de la norme $\|\cdot\|_1$ est un espace de Banach. L'ajout de la convolution (loi de composition interne) confère à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ la structure d'algèbre de Banach.

On sait aussi que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de l'addition, de la multiplication interne, de la multiplication par un scalaire et de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_u$ est aussi une algèbre de Banach. En fait, nous montrerons par la suite qu'il existe un isomorphisme d'algèbre, appelé transformation de Fourier, entre $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et son image (par cette transformation) dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$.

Remarque 7.24 On donne ici quelques propriétés supplémentaires de la convolution. Soit $\mathrm{N} \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on pose $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N}) = \mathrm{L}^p_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$.

1. Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On a alors $f * g = g * f$ p.p.. Ceci découle de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue (propositions 7.20 et 7.21) et est démontré dans l'exercice 7.18.
2. Soit$1 < p < \infty$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Alors, $f * g$ est définie p.p. sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Cette propriété fait l'objet de l'exercice 7.20.
3. Soit $p, q \in [1, \infty]$ t.q. $(1/p) + (1/q) = 1$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et $f * g \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$, voir l'exercice 8.7.
4. Soit $p \in [1, \infty]$. Soient $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $g \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et $f * g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$, voir l'exercice 7.19.
5. (Régularisation par convolution) Soit $f : \mathbb{R}^\mathrm{N} \to \mathbb{R}$. On dit que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ si $f 1_\mathrm{K} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour tout compact K de R^N. On suppose que $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $g \in \mathrm{C}^k_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$. Alors, $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et $f * g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ (voir l'exercice 7.19, noter que $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N}) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$).
6. Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Alors, la fonction $f * g$ est aussi à support compact. Ceci fait partie de l'exercice 7.18.

La convolution est un outil très utile pour "régulariser" des fonctions. Elle est à la base de résultats de densité fondamentaux que nous verrons dans le chapitre suivant (densité de $\mathrm{C}^\infty_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour $p < \infty$, par exemple).

Il est aussi intéressant de généraliser la convolution de fonctions en convolution de mesures. On commence par remarquer qu'une fonction f dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ (voir la remarque 7.24) est entièrement déterminée par la mesure qu'elle induit sur les parties boréliennes bornées de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, c'est-à-dire par la mesure m définie par $m = f\lambda_\mathrm{N}$ (qui est une mesure signée sur Ω si Ω est une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$). Ceci est précisé dans le lemme suivant (en remarquant que $\int \varphi dm = \int \varphi f d\lambda_\mathrm{N}$ pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$).

Lemme 7.25 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* $f, g \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ *t.q.* $\int f\varphi d\lambda_\mathrm{N} = \int g\varphi d\lambda_\mathrm{N}$, *pour tout* $\varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$. *Alors,* $f = g$ *p.p..*

Démonstration – Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{N}^*$. On note B_M la boule (fermée) de centre 0 et rayon M dans $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et h_M la fonction définie par :

$$h_\mathrm{M}(x) = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{si } x \in \mathrm{B}_\mathrm{M} \text{ et } |f(x) - g(x)| \leq \mathrm{M}, \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathrm{B}_\mathrm{M} \text{ ou } |f(x) - g(x)| > \mathrm{M}, \\ \end{cases}$$

On a $h_\mathrm{M} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ (car B_M est un compact de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$). Comme $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$ est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ (théorème 5.20 pour $d = 1$ et théorème 7.18 pour $\mathrm{N} \geq 1$), il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q. $\varphi_n \to h_\mathrm{M}$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ quand $n \to +\infty$. On peut aussi supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $\varphi_n \to h_\mathrm{M}$ p.p. (théorème 6.11). Enfin, en remplaçant φ_n par $\max(\min(\varphi_n, \mathrm{M}), -\mathrm{M})$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\varphi_n \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ &\varphi_n \to h_\mathrm{M} \text{ p.p.}, \\ &|\varphi_n| \leq \mathrm{M} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $\varphi_n \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{R})$, on a $\int (f - g)\varphi_n d\lambda_\mathrm{N} = 0$. Le théorème de convergence dominée (la domination est par $\mathrm{M}1_{\mathrm{B}_\mathrm{M}}|f - g|$) donne alors $\int h_\mathrm{M}(f - g) d\lambda_\mathrm{N} = 0$. En faisant maintenant tendre M vers l'infini, le théorème de convergence monotone donne $\int |f - g| d\lambda_\mathrm{N} = 0$, et donc $f = g$ p.p. ■

Pour que la convolution de mesures soit une généralisation de la convolution de fonctions, on souhaite que $m*\mu = (f*g)\lambda_N$, lorsque $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$ avec $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (et donc $f*g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$). Noter que m, μ et $m*\mu$ sont des mesures signées. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. On pose $m = f\lambda_N$ et $g = g\lambda_N$. Pour toute fonction φ borélienne bornée de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ (par exemple, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$),

$$\int (f*g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy\right)\varphi(x)dx.$$

(On rappelle que dx désigne $d\lambda_N(x)$). En utilisant le théorème de Fubini, qui s'applique bien ici car

$$\int\int |f(x-y)g(y)\varphi(x)|dxdy \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_1\|g\|_1,$$

et avec le changement de variable $z = x-y$ (pour y fixé), on obtient :

$$\begin{aligned}\int (f*g)\varphi d\lambda_N &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi(x)dx\right)g(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z+y)dz\right)g(y)dy.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int (f*g)\varphi d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(z+y)dm(z)\right)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^{2N}}\varphi(y+z)d(m\otimes\mu)(z,y), \tag{7.8}$$

où la dernière égalité découle de la définition de $m\otimes\mu$. Plus précisément, si m et μ sont des mesures finies (c'est-à-dire des applications σ-additives de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ dans $\mathbb{R}^+$), la dernière égalité de 7.8 est donnée par le troisième item du théorème de Fubini (théorème 7.12). Si m et μ sont des mesures signées, on se ramène au cas précédent avec la décomposition de Hahn (proposition 2.33) qui donne $m = m^+ - m^-$ et $\mu = \mu^+ - \mu^-$. La mesure $m\otimes\mu$ est alors définie à partir de $m^\pm \otimes \mu^\pm$.

On est ainsi amené naturellement à définir $m*\mu$ en utilisant le deuxième membre de (7.8) pour définir $\int \varphi d(m*\mu)$.

Définition 7.26 (Convolution de mesures) *Soit* $N \geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. *On définit la mesure signée* $m*\mu$ *sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ *par :*

$$m*\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^{2N}} 1_A(x+y)d(m\otimes\mu)(x,y) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

où $m\otimes\nu = m^+\otimes\mu^+ + m^-\otimes\mu^- - m^-\otimes\mu^+ - m^+\otimes\mu^-$ *et* $m^\pm$ $\mu^\pm$ *sont données par la décomposition de Hahn de* m *et* μ *(proposition 2.33).*

Le fait que $m*\mu$ est une mesure signée sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est facile (la σ-additivité de $m*\mu$ découle, par exemple, du théorème de convergence dominée). On déduit de cette définition la proposition suivante.

Proposition 7.27 *Soit* $N \geq 1$ *et* m, μ *des mesures signées sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. On a alors, pour tout φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}$ *(par exemple,* $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$*) :*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi d(m*\mu) = \int_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2N})}\varphi(x+y)d(m\otimes\mu)(x,y).$$

2. Si m et μ sont des probabilités, la mesure $m * \mu$ est aussi une probabilité.
3. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, $m = f\lambda_N$ et $\mu = g\lambda_N$, on a $m * \mu = (f * g)\lambda_N$.

DÉMONSTRATION – Le premier item se démontre, comme souvent, en considérant des fonctions étagées, puis en écrivant φ comme limite de fonctions étagées (bornées par la borne supérieure de $|\varphi|$, exercice 7.22). Le deuxième item est immédiat en remarquant que $m * \mu(A) \geq 0$ si m et μ sont des mesures (positives) et $m * \mu(\mathbb{R}^N) = m(\mathbb{R}^N)\mu(\mathbb{R}^N)$. Enfin, le troisième item a été vu avant la proposition 7.27. ■

Remarque 7.28 Il aurait aussi été possible de définir $m * \mu$ grâce au théorème de Riesz dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (théorème 5.16 pour $N \geq 1$). Si m, μ sont des mesures signées sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (ou, directement, des formes linéaires continues sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$). On définit, l'application L de $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x + y) dm(x) d\mu(y), \forall \varphi \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}).$$

L'application L est une forme linéaire continue sur $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Par le théorème de Riesz, il existe donc une unique mesure de Radon, notée τ (c'est la mesure convoluée de m et μ) t.q. :

$$L(\varphi) = \int \varphi(s) d\tau(s).$$

7.6 Formules de changement de variable

La proposition 7.21 donne un résultat sur les changements de variables "simples". On donne maintenant une généralisation dans le cas où les intégrales portent sur des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 7.29 (Formules de changement de variable) *Soit $N \geq 1$, U et V des ouverts bornés de $\mathbb{R}^N$ et φ un C^1-difféomorphisme de U dans V (i.e. φ est une bijection de U dans V, $\varphi \in C^1(U, V)$ et $\varphi^{-1} \in C^1(V, U)$). On note $D\varphi(y)$ la matrice jacobienne de φ en y et $Det(D\varphi)$ la fonction $y \mapsto Det(D\varphi(y))$.*

1. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$. Alors,

$$(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{M}_+ \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy.$$

2. Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f 1_V \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Alors,

$$(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1 \text{ et } \int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy.$$

DÉMONSTRATION – Comme φ est de classe C^1, la fonction $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U$ est mesurable si f est mesurable. Il est plus difficile de montrer l'égalité donnée dans l'item 1 du théorème. Cette démonstration n'est pas faite ici. Elle consiste à se ramener par un procédé de localisation au cas de changements de variable affines.

Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier. En effet, soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$ t.q. $f 1_V \in \mathcal{L}^1$. En appliquant le premier item à la fonction $|f| \in \mathcal{M}_+$, on obtient que $(f \circ \varphi)|Det(D\varphi)|1_U \in \mathcal{L}^1$. Puis en appliquant le premier item à f^+ et f^- et en faisant la différence, on obtient bien que $\int_V f(x)dx = \int_U f(\varphi(y))|Det(D\varphi(y))|dy$.
■

Un exemple de changement de variable On conclut cette section en donnant l'exemple des coordonnées polaires pour N = 2. Soit $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). On veut calculer (par exemple) $\int_{B_1} f(x)dx$, où B_1 est la boule unité (ouverte) de $\mathbb{R}^2$, en passant en coordonnée polaires.

On a donc $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2\,;\, |x| < 1\}$, où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$ si $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$.

On pose $L = \{(x_1, 0)^t,\ x_1 \in [0,1[\}$ et on remarque que $\lambda_2(L) = \lambda([0,1[) \times \lambda(\{0\}) = 0$. Donc, en posant $V = B_1 \setminus L$, on a :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_{B_1\setminus L} f(x)dx = \int_V f(x)dx (= \int_V f d\lambda_2).$$

On pose aussi $U =]0,1[\times]0,2\pi[$, de sorte que U et V sont de ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$. L'application $\varphi : (r,\theta)^t \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)^t$ est alors une bijection de U dans V. Elle est de classe C^1 et son inverse est de classe C^1 (φ et φ^{-1} sont même de classe C^∞). On peut calculer la matrice jacobienne de φ et son déterminant :

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix},\ |Det(D\varphi(r,\theta))| = r.$$

On peut donc appliquer le théorème 7.29, il donne :

$$\begin{aligned}\int_{B_1} f(x)dx = \int_V f(x)dx &= \int_U f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta) \\ &= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\lambda_2(r,\theta)\end{aligned}$$

En appliquant maintenant le théorème de Fubini-Tonelli pour évaluer la dernière intégrale (si $f \in \mathcal{L}^1$ au lieu de $f \in \mathcal{M}_+$, on raisonne d'abord sur $|f|$ puis on utilise le théorème de Fubini), on obtient :

$$\int_{B_1} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta.$$

Si $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, c'est-à-dire s'il existe ψ t.q. $f(x) = \psi(|x|)$, on obtient alors :

$$\int_{B_1} f(x)dx = 2\pi \int_0^1 \psi(r) r dr.$$

En particulier, on voit que $f 1_{B_1} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, avec g définie par $g(r) = r\psi(r)$ pour $r \in]0,1[$.

Prenons toujours $f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ (ou bien $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$). Le raisonnement que nous venons de faire pour B_1 peut être fait pour $B_a = \{x \in \mathbb{R}^2\,;\, |x| < a\}$ avec $a > 0$. On obtient alors, pour tout $a > 0$:

$$\int_{B_a} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.9}$$

En prenant $a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, dans (7.9), on obtient aussi, quand $n \to +\infty$ (avec le théorème de convergence monotone si $f \in \mathcal{M}_+$ et en raisonnement avec $f^\pm$ si $f \in \mathcal{L}^1$) :

$$\int f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\int_0^\infty f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr) d\theta. \tag{7.10}$$

7.7 Exercices

7.7.1 Mesure produit

Exercice 7.1 (Mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. [S'inspirer de la démonstration faite pour $n = 2$ dans l'exercice 2.6.]

Exercice 7.2 (Algèbre engendrée par un produit de tribus) Soient E_1, E_2 deux ensembles, T_1 une tribu sur E_1 et T_2 une tribu sur E_2. On note $E = E_1 \times E_2$ et on rappelle que $T_1 \times T_2 = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in T_1,\ A_2 \in T_2\}$.

Montrer que l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ est égale à l'ensemble des réunions finies disjointes d'éléments de $T_1 \times T_2$ c'est-à-dire que, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, A appartient à l'algèbre engendrée par $T_1 \times T_2$ si et seulement si il existe $(A^{(p)})_{p=1,\ldots,n} \subset T_1 \times T_2$ t.q. $A^{(p)} \cap A^{(q)} = \emptyset$ si $p \neq q$ et $A = \bigcup_{p=1}^{n} A^{(p)}$.

Exercice 7.3 (Exemple de mesure produit) Soit m_1 et m_2 des mesures σ−finies, non nulles, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et t.q. $m_1 \otimes m_2(\mathbb{R}^2 \setminus D) = 0$, où $D = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\}$. Montrer qu'il existe a, α, $\beta \in \mathbb{R}$ t.q. $m_1 = \alpha\delta_a$ et $m_2 = \beta\delta_a$, où δ_a est la mesure de Dirac en a.

Exercice 7.4 (Fonction dont les traces sont boréliennes) Pour $B \subset \mathbb{R}^2$, on note $t(B)$ l'ensemble des $x_1 \in \mathbb{R}$ t.q. $(x_1, 0) \in B$. On pose $T = \{B \subset \mathbb{R}^2;\ t(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Soit $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Pour $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(x) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)^t$.

1. Montrer que T est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ t.q. $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $B = A \times \{0\}$.
   (a) Montrer que $B \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
   (b) On pose $f = 1_B \circ g$. Montrer que la fonction f n'est pas une fonction borélienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ mais que les fonctions $f(x_1, \cdot)$ et $f(\cdot, x_2)$ sont boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

7.7.2 Fubini–Tonelli et Fubini

Exercice 7.5 (Contre-exemple au théorème de Fubini) Soit $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } x < y \leq 2x \\ -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \text{ et } 2x < y \leq 3x \\ 0 & \text{si } x > 0 \text{ et } y \notin]x, 3x[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$- mesurable.
2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(.,y) \in L^1$; on pose $\phi(y) = \int f(x,y)d\lambda(x)$. Montrer que $\phi \in L^1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,.) \in L^1$; on pose $\psi(x) = \int f(x,y)d\lambda(y)$. Montrer que $\psi \in L^1$.
4. Montrer que $\int \phi d\lambda \neq \int \psi d\lambda$ (ϕ et ψ sont définies dans les questions précédentes).
5. Pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 7.6 (Intégrale d'une fonction positive) Soit (E, T, m) un espace mesuré σ-fini, et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. On pose $F = 1_A$ avec $A = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times E;\ 0 < t < f(x)\}$.

1. Montrer que F est $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes T$- mesurable

2. Montrer que $\int f\,dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) > t\})dt$ et que $\lambda \otimes m(A) = \int f\,dm$.
   [Utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]
3. Montrer que $\int f\,dm = \int_0^{+\infty} m(\{x \in E; f(x) \geq t\})dt$.

Exercice 7.7 (Une caractérisation de L^p**)** On munit $\mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^2$] de sa tribu borélienne, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ [resp. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$]. Soit f une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on pose $A_y = \{x \in \mathbb{R}; |f(x)| > y\}$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_-^*$, on pose $A_y = \emptyset$.

1. Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto 1_{A_y}(x)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que $\{(x,y)^t \in \mathbb{R}^2; |f(x)| > y\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$.]
   Soit $p \in [1,\infty[$. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $g_p(y) = |y|^{p-1}\lambda(A_y)$ (en convenant que $g_p(0) = 0$ si $\lambda(A_0) = \infty$).
2. (a) Montrer que l'application $(x,y)^t \mapsto |y|^{p-1}1_{A_y}(x)$ est mesurable positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g_p est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. [On pourra, par exemple, utiliser le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 7.8 (À propos de Fubini) Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de la tribu de Lebesgue et de la mesure de Lebesgue et on note $\mathcal{L}^1$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}([0,1],\mathcal{B}([0,1]),\lambda)$.
Soit, pour $n \geq 1$, $I_n = [1-1/n, 1-1/(n+1)[$. On pose $\varphi_n = n(n+1)1_{I_n}$ et $f(x,y) = \sum_{n\geq 1}(\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x))\varphi_n(y)$.

1. Montrer que $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ est bien définie et mesurable (c'est-à-dire borélienne).
2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$ et que, pour tout $y \in [0,1]$, $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $[0,1]$.
3. Montrer que $F : x \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,dy$ et $G : y \mapsto \int_{[0,1]} f(x,y)\,dx$ sont intégrables sur $[0,1]$. Calculer alors $\int_{[0,1]} F(x)\,dx$ et $\int_{[0,1]} G(y)\,dy$. Peut on appliquer à f le théorème de Fubini ?

Exercice 7.9 (Intégrale de Dirichlet)

1. Vérifier que si $n \geq 1$,, $\displaystyle\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n (\int_0^\infty e^{-xt}dt)\sin x\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle F_n(t) = \int_0^n e^{-xt}\sin x\,dx$ $(t \geq 0)$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty F_n(t)dt$. ($F_n$ est définie à la question précédente.)
4. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

7.7.3 Mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$

Exercice 7.10 (Propriétés élémentaires de λ_N**)** Soit $N \geq 2$. On rappelle que λ_N est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

1. Soit $A_1,\ldots,A_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   Montrer que $\prod_{i=1}^N A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\lambda_N(\prod_{i=1}^N A_i) = \prod_{i=1}^N \lambda(A_i)$.

2. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$ t.q. $\alpha_i < \beta_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\lambda_N(\prod_{i=1}^{N}]\alpha_i, \beta_i[) = \prod_{i=1}^{N} \lambda(]\alpha_i, \beta_i[).$$

3. Soit K est un compact de $\mathbb{R}^N$ (noter que $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$). Montrer que $\lambda_N(K) < +\infty$.
4. Soit O un ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $\lambda_N(O) > 0$.
5. Soit $f, g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer que $f = g$ p.p. (c'est-à-dire λ_N-p.p.) implique $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.
6. Montrer que $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

Exercice 7.11 (Régularité de λ_N) Soit m une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ t.q. $m(K) < \infty$ pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$. (noter que ceci est vrai pour $m = \lambda_N$.)

1. Soient $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe O ouvert de $\mathbb{R}^N$ et F fermé de $\mathbb{R}^N$ tels que :

$$F \subset A \subset O \text{ et } m(O \setminus F) \leq \varepsilon.$$

2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Déduire de la question précédente que $m(A) = \inf\{m(O), \text{O ouvert t.q. } A \subset O\}$.

Exercice 7.12 (Fonction de Carathéodory) Soit $N, p, q \in \mathbb{N}^\star$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soit a une application de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que $a(\cdot, s)$ est borélienne pour tout $s \in \mathbb{R}^p$ et $a(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$.

1. Montrer que la fonction a est borélienne de $\Omega \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$. (Noter que ceci peut être faux si a était seulement borélienne par rapport à chacun de ses arguments, un exemple est donné dans l'exercice 7.4.)
2. Soit v est une fonction borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que la fonction $x \mapsto a(x, v(x))$ est alors borélienne de Ω dans $\mathbb{R}^q$.
3. Soient v_1, v_2 deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^p$. On suppose que $v_1 = v_2$ p.p.. Montrer que les fonctions $x \mapsto a(x, v_1(x)$ et $x \mapsto a(x, v_2(x)$ sont égales p.p. sur Ω.

Exercice 7.13 (Densité de C_c dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ pour la mesure de Lebesgue)
Montrer que l'espace $C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ $(N \geq 1)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (c'est-à-dire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \leq \varepsilon$). [S'inspirer de la démonstration faite pour le cas N = 1, théorème 5.20.]

Exercice 7.14 (Densité de C_c et C_c^∞ dans L^1 pour une mesure finie sur les compacts) Soit $d \geq 1$ et μ une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ vérifie les deux propriétés suivantes :

(p1) μ est finie sur les compacts de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire que $\mu(K) < +\infty$ si K est un compact de $\mathbb{R}^d$,

(p2) μ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe O ouvert et F fermé t.q. $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

En fait, la propriété (p1) entraîne la propriété (p2) (voir la proposition 7.17) mais cette démonstration n'est pas demandée ici.

On note $\mathcal{L}^1_\mu$ l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1_\mu$, on note $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $|x|$ la norme euclidienne de x.

1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire φ continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et à support compact). Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}^1_\mu$.

2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $\eta > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $\varphi(x) = \frac{(\eta - d(x,K))^+}{\eta}$ avec $d(x,K) = \inf\{|x-y|, \ y \in K\}$. Montrer que $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et que $\varphi(x) = 1$ si $x \in K$.
3. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\mu(A) < +\infty$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe O ouvert et K compact t.q. $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \le \varepsilon$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|\varphi - 1_A\|_1 \le \varepsilon$.
4. Soit f une fonction borélienne positive de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \in \mathcal{L}^1_\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \le \varepsilon$. [On pourra approcher f par une fonction étagée.]
5. (Densité.) Soit $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \varphi\|_1 \le \varepsilon$.
   (b) Montrer qu'il existe $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $\|f - \psi\|_1 \le \varepsilon$. [On pourra montrer que, si $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, on a $\|\varphi - \varphi_n\|_1 \to 0$, quand $n \to +\infty$, avec $\varphi_n = \varphi * \rho_n$ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille régularisante, voir la définition 8.9.]
6. (Continuité en moyenne ?)
   (a) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $\|\varphi(\cdot + h) - \varphi\|_1 \to 0$ quand $h \to 0$.
   (b) Montrer, en donnant un exemple (c'est-à-dire en choisissant convenablement f et μ) qu'on peut avoir $f \in \mathcal{L}^1_\mu$ et $\|f(\cdot + h) - f\|_1 \not\to 0$ quand $h \to 0$.
7. On suppose maintenant que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et que μ est une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les sous ensembles compacts de Ω. Indiquer brièvement comment on peut montrer la densité de $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ et $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^1_\mathbb{R}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu)$.

Exercice 7.15 (Invariance par translation de λ_N) Soient $N \ge 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$, de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, montrer que $\varphi(A) = \{\varphi(x), x \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
2. Montrer que $\lambda_N(\varphi(A)) = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \lambda_N(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. [On pourra faire une récurrence sur N : la proposition 2.48 donne le résultat pour la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée λ. On suppose que le résultat est vrai pour λ_{N-1} (et pour toute famille $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \in \mathbb{R}^*$, $\beta_1, \ldots, \beta_{N-1} \in \mathbb{R}$). On le démontre alors pour λ_N en posant $m(A) = (\prod_{i=1}^N |\alpha_i|)^{-1} \lambda_N(\varphi(A))$ et en montrant que m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ égale à λ_N sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{N-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On utilise pour conclure la partie unicité du théorème 7.3 sur la mesure produit.]

Exercice 7.16 (Changement de variable simple) Soient $N \ge 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}^*$ et $\beta_1, \ldots, \beta_N \in \mathbb{R}$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$. On pose $\varphi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N x_N + \beta_N)^t$ (de sorte que φ est une bijection de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$).

1. Soit $f \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{E}_+$ et que
$$\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N.$$
   [Utiliser l'exercice 7.15.]
2. Soit $f \in \mathcal{M}_+ = \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N))$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{M}_+$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, montrer que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1$ et que $\int f d\lambda_N = \prod_{i=1}^N |\alpha_i| \int (f \circ \varphi) d\lambda_N$.

Exercice 7.17 (Primitives de fonctions L^p)
Soit $p \in [1, \infty[$. On note $L^p = L^p_\mathbb{R}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$. Soit $f, g \in L^p$. On définit F et G de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par, pour $x \in [0,1]$,
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} f d\lambda), \quad G(x) = \int_0^x g(t)dt \ \ (= \int_{]0,x[} g d\lambda).$$

1. Montrer que F et G sont des fonctions continues et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $|F(y) - F(x)| \leq C|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$ et $|G(y) - G(x)| \leq C|y-x|^{1-\frac{1}{p}}$, pour tous $x, y \in [0,1]$, $x < y$.
2. On suppose $p > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Montrer que, pour tout $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on a $(F(x), G(x)) \in A_{n,k} \times B_{n,k}$, où $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$ (indépendants de x) dont les longueurs tendent vers 0 quand $n \to +\infty$. [Utiliser la question 1.]
3. On suppose $p > 2$. Montrer que $E = \{(F(x), G(x)); x \in [0,1]\}$ est une partie négligeable de $\mathbb{R}^2$ (muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$). [En utilisant une majoration convenable des longueurs de $A_{n,k}$ et $B_{n,k}$, inclure E (pour tout $n \in \mathbb{N}$) dans une partie de $\mathbb{R}^2$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 quand $n \to +\infty$.]

7.7.4 Convolution

Exercice 7.18 (Propriétés élémentaires de la convolution) Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$.

1. Montrer que $f * g = g * f$ p.p.. [Utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue et sa conséquence pour les changements de variable simples (propositions 7.20 et 7.21).]
2. On suppose que f et g sont à support compact (f à support compact signifie qu'il existe K, compact de $\mathbb{R}^N$, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c). Montrer que la fonction $f * g$ est alors aussi à support compact. [On désigne par $B(0, \alpha)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon α. Comme f et g sont à support compact, il existe a et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $f = 0$ p.p. sur $B(0,a)^c$ et $g = 0$ p.p. sur $B(0,b)^c$. Montrer que $f * g = 0$ p.p. sur $B(0, a+b)^c$.]

Exercice 7.19 (Convolution $L^p - C_c^\infty$)
Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^N) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, B(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ (ou $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$) et $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. On pourra se limiter au cas $N = 1$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $f(\cdot)\rho(x - \cdot)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N)$. On pose alors

$$f * \rho(x) = \int f(\cdot)\rho(x - \cdot) d\lambda_N.$$

2. Montrer que $f * \rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.
3. On suppose maintenant que f est à support compact, c'est-à-dire qu'il existe un compact de $\mathbb{R}$, noté K, t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c, montrer que $f * \rho$ est aussi à support compact.

Exercice 7.20 (Inégalité de Young) Soient $1 < p < +\infty$, $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et $g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Montrer que $f * g$ est définie p.p., que $f * g \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$ et que $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$. [Écrire

$$\int (\int |f(x-y)g(y)| dy)^p dx = \int (\int |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| dy)^p dx,$$

avec $q = p/(p-1)$. Appliquer l'inégalité de Hölder puis le théorème de Fubini-Tonelli.]

Exercice 7.21 (Itérations de convolution) Soient $L^1 = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $f \in L^1$ t.q. $f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}_-$. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f^{*n} par :

$$f^{*1} = f \text{ et } f^{*n} = f^{*(n-1)} * f \text{ pour } n \geq 1.$$

Pour $\lambda \geq 0$, on pose : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} |f(t)| dt$.

1.(a) Montrer que f^{*n} est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et que $f^{*n} = 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

(b) Montrer, par récurrence sur n, que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}|f^{*n}(t)|dt \le (g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \ge 0$ et tout $n \ge 1$.

(c) En déduire que $\int_0^x |f^{*n}(t)|dt \le e^{\alpha x}(g(\alpha))^n$, pour tout $\alpha \ge 0$ tout $n \ge 1$ et tout $x \ge 0$.

2. Soit $h \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $h * f(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $h * f \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Remarquer de même que $h * f^{*n} \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose maintenant que, $h = 0$ sur $\mathbb{R}_-$; montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h * f^{*n}(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.22 Soient μ et ν des mesures sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, T)$. On rappelle que $\mu * \nu$ est défini par :

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_A(x+y)d\mu(x)d\nu(y).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure.
2. Montrer que si μ et ν sont des probabilités, alors $\mu * \nu$ est une probabilité.
3. Montrer que si μ et ν sont des mesures de densités respectives f et g (par rapport à Lebesgue), alors $\mu * \nu$ est une mesure de densité $f * g$.

7.7.5 Changement de variable

Exercice 7.23 (Mesure de boules de $\mathbb{R}^2$)
On considère ici l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2)$. Montrer que $\lambda_2(\{x \in \mathbb{R}^2; |x| < R\}) = \pi R^2$ pour tout $R > 0$.

Exercice 7.24 (Coordonnées polaires)

1. Calculer $\int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ (on rappelle que $dx\,dy$ désigne $d\lambda_2(x,y)$).
   [On pourra utiliser le passage en coordonnées polaires.]
2. Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} dx$.

Exercice 7.25 (Cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^N$) On note S^{N-1} la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^N$ (*i.e.* $S^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = 1\}$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle). Pour $A \subset S^{N-1}$, on pose $\widetilde{A} = \{tx,\ t \in [0,1],\ x \in A\}$. Montrer que si A est un borélien de S^{N-1}, alors $\widetilde{A}$ est un borélien de $\mathbb{R}^N$.
On définit alors, quand A est un borélien de S^{N-1}, $\sigma(A) = N\lambda_N(\widetilde{A})$. Montrer que σ définit une mesure sur les borélien de S^{N-1}.
Montrer que, pour tout $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable positive ou intégrable on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{N-1}} f(\rho\xi)\,d\sigma(\xi)\right)\rho^{N-1}\,d\rho.$$

Trouver alors les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $x \to |x|^\alpha$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^N \backslash B_1$ ou sur B_1, avec $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^N ; |x| \le 1\}$.

Exercice 7.26 (Changement de variable $W^{1,1}$ croissant) Soit $f \in \mathcal{L}^1_R(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ t.q. $f > 0$ p.p.. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. (On rappelle que, pour $a < b$, $\int_a^b f(t)dt$ désigne $\int 1_{]a,b[} f\,d\lambda$.)

1. Montrer que $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que φ est strictement croissante.

   On note I_m l'image de φ (I_m est donc un intervalle dont les bornes sont 0 et $\int f\,d\lambda$) et on note $\psi\ :\ I_m \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de φ. La fonction ψ est donc continue de I_m dans $\mathbb{R}$ et on a $\varphi(\psi(s)) = s$ pour tout $s \in I_m$ et $\psi(\varphi(s)) = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

   On rappelle que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(I)$ est sa tribu borélienne, on a $\mathcal{B}(I) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

   Pour $A \subset \mathbb{R}$, on note $\varphi(A) = \{\varphi(x),\ x \in A\}$. Pour $A \subset I_m$, on note $\psi(A) = \{\psi(x),\ x \in A\}$.

2. Montrer que $\{\varphi(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = \mathcal{B}(I_m)$ et que $\{\psi(A), A \in \mathcal{B}(I_m)\} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(I)) = \int_I f d\lambda$.
4. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(\varphi(O)) = \int_O f d\lambda$. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$O \text{ ouvert}, \lambda(O) \leq \delta \Rightarrow \lambda(\varphi(O)) \leq \varepsilon.$$

5. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\lambda(\varphi(A)) = \int_A f d\lambda$. [On pourra, par exemple, utiliser la régularité de λ et la question précédente.]
6. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $a < b$.
   (a) Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $g = 1_B$. Montrer que :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt = \int_a^b g(\varphi(s))f(s)ds. \tag{7.11}$$

   [Prendre $A = \psi(B \cap I_m) \cap]a, b[$ et utiliser la question précédente.]

   (b) Montrer que (7.11) est encore vraie si g appartient à $\mathcal{E}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis si g appartient à $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

   (c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $g 1_{]\varphi(a),\varphi(b)[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Montrer $g \circ \varphi f 1_{]a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et que (7.11) est vraie.

N.B. On peut montrer que φ est dérivable p.p. et que $\varphi' = f$ p.p.. La formule (7.11) est alors la formule habituelle de changement de variable. Noter aussi que la fonction φ, restreinte à l'intervalle $]a, b[$, appartient à un espace appelé $W^{1,1}(]a, b[)$ (ce qui explique le titre de l'exercice).

Chapitre 8

Densité, séparabilité et compacité

Ce chapitre est consacré en majeure partie aux espaces $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $\mathcal{B}(\Omega)$ est la tribu borélienne de Ω, λ_N désigne la restriction à $\mathcal{B}(\Omega)$ de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (aussi notée λ_N) et $1 \leq p \leq \infty$.
On notera toujours $L^p(\Omega) = L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \lambda_N)$.

8.1 Théorèmes de densité pour les espaces $L^p(\Omega)$

Nous avons vu au chapitre précédent que les espaces L^p sont très intéressants car ils sont en particulier complets. Cependant, les éléments de ces espaces sont des objets avec lesquels il est malaisé de travailler. Pour démontrer des propriétés sur ces objets, on travaille très souvent par densité : on travaille sur des fonctions régulières, qui sont faciles à manipuler, et on passe ensuite à la limite, à condition d'avoir établi au préalable un résultat de densité, qui nous permet justement ce passage à la limite.

8.1.1 Densité des fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

Définition 8.1 (Fonction à support compact) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* f *est à support compact (dans* Ω*) s'il existe un compact* $K \subset \Omega$ *tel que* $f = 0$ *sur* $\Omega \setminus K$.

On note souvent $\mathrm{supp}(f)$ l'adhérence dans Ω de l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $f(x) \neq 0$. On peut montrer que f est à support compact si et seulement si $\mathrm{supp}(f)$ est compact.

Définition 8.2 ($C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$) *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* f *une fonction définie de* Ω *dans* $\mathbb{R}$. *On dit que* $f \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *si*

- f *est de classe* C^∞ *(de* Ω *dans* $\mathbb{R}$*).*
- f *est à support compact (dans* Ω*).*

On note aussi $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

Remarque 8.3 Si $N = 1$ et $\Omega =]0,1[$, la fonction f définie par $f(x) = x(x-1)$ est de classe C^∞ sur Ω, mais elle n'est pas à support compact. En effet, il n'existe pas de compact inclus dans $]0,1[$ t.q. f soit nulle en dehors de ce compact.

Par contre, si f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x \in]0,\varepsilon[$ et pour $x \in]1-\varepsilon,1[$, alors $f \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R})$.

Théorème 8.4 (Densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *(par exemple,* $\Omega = \mathbb{R}^N$*). Alors :*

$C_c(\Omega,\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *c'est-à-dire :*

$$\forall f \in L^p(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R}) \text{ t.q. } \|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon.$$

Démonstration – La démonstration de ce résultat est faite dans l'exercice 6.4 pour le cas $\Omega = \mathbb{R}$. La généralisation donnée ici se démontre de manière très voisine (grâce au résultat de régularité, proposition 7.17), voir l'exercice 8.1.

■

Une conséquence importante du théorème 8.4 est la continuité en moyenne que l'on donne maintenant.

Théorème 8.5 (Continuité en moyenne) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$,*et* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ *quand* $h \to 0$, *c'est-à-dire :*

$$\int |f(x+h)-f(x)|^p dx \to 0, \text{ quand } h \to 0.$$

La démonstration est ici encore très similaire à la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4, elle est proposée dans l'exercice 8.2.

Remarque 8.6 (Attention à L^∞ !) Les deux résultats précédents sont faux dans L^∞. Considérer par exemple le cas $N = 1$ et la fonction $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$, en confondant f avec sa classe). On peut montrer que (voir l'exercice 8.4) :

$$\forall \varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2},$$
$$\forall h > 0,\ \|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1.$$

8.1.2 Régularisation par convolution

Si $a \in \mathbb{R}_+$, on note B_a la boule fermée de centre 0 et de rayon a de $\mathbb{R}^N$.

Définition 8.7 ($L^1_{\mathbf{loc}}$) *Soient* $N \geq 1$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *On définit que* f *est localement intégrable sur* Ω *si* $f 1_K \in L^1(\Omega)$ *(au sens "il existe* $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *t.q.* $f = g$ *p.p. sur* K*") pour tout compact* $K \in \Omega$. *On note* $L^1_{loc}(\Omega)(= L^1_{loc}(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),\lambda_N))$ *l'ensemble des fonctions localement intégrables sur* Ω.

Remarque 8.8 Soient $\mathrm{N} \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Pour tout p tel que $1 \leq p \leq +\infty$, on a $\mathrm{L}^p(\Omega) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (ceci est une conséquence immédiate du résultat d'inclusion entre les espaces L^p, proposition 6.25).

Définition 8.9 (Famille régularisante) *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *et soit* $\rho \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ *t.q.* $\rho \geq 0$, $\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\ ;\ \rho(x) \neq 0\} \subset \mathrm{B}_1$ *et* $\int \rho(x)dx = 1$. *On appelle famille régularisante (ou famille de noyaux régularisants) la famille de fonctions* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ *définie par :* $\rho_n(x) = n^{\mathrm{N}}\rho(nx), x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 8.10 Dans la définition précédente, il est facile de vérifier que

$$\{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\ ;\ \rho_n(x) \neq 0\} \subset \mathrm{B}_{\frac{1}{n}} \text{ et } \int \rho_n(x)dx = 1.$$

Notons qu'il existe bien des fonctions vérifiant les propriétés demandées pour ρ dans la définition 8.9. Pour $\mathrm{N} = 1$, par exemple, il suffit de prendre

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha \exp(\frac{1}{x^2-1}) \text{ si } x \in]-1,1[, \\ 0 \text{ si } x \notin]-1,1[, \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ choisi pour avoir $\int \rho(x)dx = 1$.

Lemme 8.11 (Régularisation par convolution) *Soient* $\mathrm{N} \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante et* $f \in \mathrm{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. *Alors,* $f * \rho_n$ *est définie partout sur* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *et* $f * \rho_n \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$. *De plus, s'il existe* $a > 0$ *t.q.* $f = 0$ *p.p. sur* B_a^c, *on a alors* $f * \rho_n = 0$ *sur* $\mathrm{B}^c_{a+\frac{1}{n}}$ *(*$f * \rho_n$ *est donc à support compact).*

Démonstration – La démonstration du fait que $f * \rho_n \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ est donnée dans l'exercice 7.19. La seconde partie est donnée dans les exercices 7.19 et 7.18. L'indication de la seconde question de l'exercice 7.18 donne le support indiqué ici pour $f * \rho_n$. ■

Proposition 8.12 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une famille régularisante. Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. *Alors,*

$$f * \rho_n \to f \text{ dans } \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Démonstration – La démonstration est une conséquence du théorème de continuité en moyenne (théorème 8.5). On choisit un représentant de f, encore noté f. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = f * \rho_n$. Pour $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \int f(x-y)\rho_n(y)dy - f(x)\int \rho_n(y))dy \\ &= \int (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)dy, \end{aligned}$$

et donc :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq (\int |f(x-y) - f(x)|\rho_n(y)dy)^p.$$

Pour $p > 1$, on utilise l'inégalité de Höder en écrivant $\rho_n = \rho_n^{\frac{1}{p}}\rho_n^{\frac{1}{q}}$ (avec $q = p/(p-1)$) et on obtient (ce qui est aussi immédiatement vrai pour $p = 1$) :

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)|^p &\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy(\int \rho_n(y)dy)^{\frac{p}{q}} & (8.1) \\ &\leq \int |f(x-y) - f(x)|^p \rho_n(y)dy. & (8.2) \end{aligned}$$

On remarque maintenant que l'application $(x,y)^t \mapsto (f(y)-f(x))$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (munis de leurs tribus boréliennes respectives) ; ceci est une conséquence (par exemple) de la proposition 7.11 et de la mesurabilité de la somme d'applications mesurables. L'application $(x,y)^t \mapsto (x,x-y)$ est mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ (car continue). Par composition, l'application $(x,y)^t \mapsto (f(x-y)-f(x))$ est donc mesurable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On en déduit, en utilisant une nouvelle fois la mesurabilité de la composée d'applications mesurables (et du produit d'applications mesurables), que $(x,y)^t \mapsto |f(x-y)-f(x)|^p\rho_n(y)$ est mesurable (positive) de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini-Tonelli pour déduire de (8.2) que :

$$\int |f_n(x)-f(x)|^p dx \le \int (\int |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)dy)dx$$

$$= \int (\int |f(x-y)-f(x)|^p \rho_n(y)dx)dy \tag{8.3}$$

$$= \int_{\mathrm{B}_{\frac{1}{n}}} \|f(\cdot - y)-f\|_p^p \rho_n(y)dy.$$

On utilise maintenant le théorème 8.5. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}},\ |h| \le \eta \ \Rightarrow \|f(\cdot - h)-f\|_p \le \varepsilon.$$

On déduit donc de (8.3) que :

$$\frac{1}{n} \le \eta \Rightarrow \|f_n - f\|_p \le \varepsilon.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Les deux résultats précédents permettent de démontrer le théorème de densité suivant :

Théorème 8.13 (Densité de $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$) *Soient* $\mathrm{N} \ge 1$ *et* $p \in [1,+\infty[$, $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

DÉMONSTRATION – La démonstration proposée ici utilise une méthode dite de troncature et régularisation.

Pour $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, on dit que f est à support compact s'il existe K compact de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ t.q. $f = 0$ p.p. sur K^c. On note A l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ à support compact.

Etape 1. On montre dans cette étape que A est dense dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f 1_{\mathrm{B}_n}$. Comme $f_n \to f$ p.p. quand $n \to +\infty$ et $|f_n| \le |f|$ p.p. (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on peut appliquer le théorème de convergence dominée dans L^p (on utilise ici le fait que $p < \infty$). Il donne que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ quand $n \to +\infty$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ A, on a bien montré la densité de A dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

Etape 2. Soit maintenant $f \in$ A. Pour conclure la démonstration, il suffit de montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{R})$ t.q. $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ quand $n \to +\infty$. Or cette suite est donné avec $f_n = f * \rho_n$ où $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille régularisante. En effet, le lemme 8.11 donne que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{R})$ et la proposition 8.12 donne que $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ quand $n \to +\infty$. ■

On rappelle (remarque 8.6) que $\mathrm{C}_c(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{R})$ (et donc aussi $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}},\mathbb{R})$) n'est pas dense dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Il est intéressant aussi de remarquer que le théorème précédent (théorème 8.13) est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ($\mathrm{N} \ge 1$), finie sur les compacts. Toutefois la démonstration donnée ici doit alors être modifiée. Ceci est fait dans l'exercice 7.14 pour $p = 1$ (et la généralisation pour traiter tous les cas $p \in [1,\infty[$ est assez simple).

8.1.3 Densité de $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$

On a aussi un résultat de densité pour les fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 8.14 (Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$) *Soient* $N \geq 1$, $p \in [1, +\infty[$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Alors,* $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

DÉMONSTRATION – Pour $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, on pose $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N \,;\, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n$ si $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. On remarque d'abord (en utilisant, comme pour le théorème précédent, le théorème de convergence dominée dans L^p) que $f 1_{K_n} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$. On peut donc choisir $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q. $\|f - f_{n_0}\|_p \leq \varepsilon$.

On pose maintenant $g = f_{n_0}$. On peut considérer que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et on a $g = 0$ p.p. sur K^c avec $K = K_{n_0}$. En prenant une famille régularisante, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$, le lemme 8.11 et la proposition 8.12 donnent que $g * \rho_n \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ quand $n \to +\infty$ et $(g * \rho_n)_{n \in \mathbb{N}^\star} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Il suffit alors de remarquer que la restriction de $g * \rho_n$ à Ω est à support compact dans Ω dès que $n > n_0$ pour conclure la démonstration. ■

Ici aussi, le théorème 8.14 est encore vrai si on remplace la mesure de Lebesgue par une mesure sur les boréliens de Ω, finie sur les compacts. La démonstration donnée ici doit alors être modifiée (voir l'exercice 7.14).

8.2 Séparabilité de $L^p(\Omega)$

Proposition 8.15 *Soient* $N \geq 1$, Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *et* p *tel que* $1 \leq p < +\infty$. *Alors, l'espace* $L^p(\Omega)$ *est séparable.*

La démonstration fait l'objet de l'exercice 8.5 (et de 6.5 pour le car $\Omega = \mathbb{R}$).
Les espaces du type L^∞ ne sont, en général, pas séparables. L'exercice 8.6 montre que, par exemple, $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$ n'est pas séparable. Une adaptation simple de la démonstration de l'exercice 8.6 montre aussi que l'espace $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$), muni de la norme de la convergence uniforme, n'est pas séparable. Par contre l'espace $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 quand le norme de la variable tend vers l'infini), muni de la même norme, est séparable. Ceci est une conséquence des deux premières questions de l'exercice 8.5 (car C_c est dense dans C_0).

8.3 Compacité dans les espaces $L^p(\Omega)$

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E ; on rappelle que A est (séquentiellement) compact si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge. Notons que cette notion de compacité séquentielle est équivalente à la notion de compacité de Borel -Lebesgue (*i.e.* de tout recouvrement de A par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini) dès que E est un espace métrique (ce qui est notre cas, car E est un espace vectoriel normé).

Une partie A de E est dite relativement compacte si son adhérence est compacte (ou encore s'il existe un compact K de E tel que $A \subset K$).

Dans le cas où E est un espace de dimension finie, A est compacte si et seulement si A est fermée bornée, et A est relativement compacte si et seulement si A est bornée.

Ces deux caractérisations sont fausses si $\dim(E) = +\infty$. On sait par un théorème de Riesz (différent des deux théorèmes de Riesz donnés dans ce livre !) que la boule unité fermée d'un e.v.n. E est compacte si et seulement si la dimension de E est finie.

On s'intéresse ici au cas $E = L^p(\Omega)$ (Ω ouvert non vide de $\mathbb{R}^N$), espace vectoriel normé de dimension infinie, et on voudrait caractériser les parties relativement compactes ; en particulier, étant donnée une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$, sous quelles hypothèses peut-on en extraire une sous-suite qui converge ? Une condition nécessaire évidente est que la partie considérée soit bornée (une partie relativement compacte est toujours bornée). La deuxième condition est, pour $1 \le p < +\infty$ et Ω bornée, que la partie soit équicontinue en moyenne, au sens précisé dans le théorème suivant :

Théorème 8.16 (Kolmogorov) *Soit $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \le p < +\infty$; on considère ici l'espace mesuré $(E, T, m) = (\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$. Soit $A \subset L^p(\Omega)$; A est relativement compacte si et seulement si :*

1. Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|f\|_p \le C$ pour tout $f \in A$,

2. la partie A est équicontinue en moyenne, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\text{pour tout } f \in A,\ |h| \le \delta \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_p \le \varepsilon,$$

3. la partie A est équi-petite à l'infini, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$, t.q.

$$\int_{B_a^c} |\tilde{f}|^p dm \le \varepsilon \text{ pour tout } f \in A,$$

où $\tilde{f}$ est la prolongée de f par 0 en dehors de Ω.

DÉMONSTRATION – La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la densité de l'espace de fonctions $C_c(\Omega, \mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$ et le théorème d'Ascoli que nous rappelons ci après (théorème 8.17). Elle est laissée à titre d'exercice, le cas $p = 1$ et $\Omega =]0, 1[$ est donné dans l'exercice 8.9. ■

Dans le cas où Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$, le théorème 8.16 peut s'énoncer plus simplement sans introduire $\tilde{f}$. Ceci est développé dans l'exercice 8.10.

Théorème 8.17 (Ascoli) *Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}$ et A une partie de l'espace vectoriel $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme ; A est relativement compacte si et seulement si A est bornée et uniformément équicontinue, i.e. $\forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$; $\forall\ x, y \in K, |x - y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon, \forall\ f \in A$.*

Corollaire 8.18 *Soient $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < +\infty$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$. On suppose que la famille $A = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 du théorème de Kolmogorov. On peut alors extraire de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite, notée $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe $f \in L^p(\Omega)$ t.q. $f_{\varphi(n)} \to f$ dans $L^p(\Omega)$ quand $n \to +\infty$.*

8.4 Compacité faible-$*$

On a introduit au chapitre 6 la convergence faible-$*$ dans le dual d'un espace de Banach. On a une propriété de compacité très utile lorsque l'espace de Banach considéré est séparable :

Proposition 8.19 (Compacité faible-$*$ séq. des bornés de E' si E est séparable) *Soit F un espace de Banach séparable et F' son dual topologique. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de F'. Alors, il existe une sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $T \in F'$ t.q. la sous-suite $(T_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers T $*$-faiblement dans F' (i.e. $T_{n_k}(u) \to T(u)$ (dans $\mathbb{R}$) pour tout élément u de F.)*

DÉMONSTRATION – La démonstration va se faire en trois étapes. L'étape principale est probablement la deuxième étape (qui décrit le procédé diagonal).

On commence par remarquer que, comme F est séparable, il existe une partie A de F, dénombrable et dense. Comme A est dénombrable, il existe uns suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ t.q. $A = \{f_p, p \in \mathbb{N}^*\}$. On note aussi $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{F'}$ (on a $C < +\infty$ car la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F').

Etape 1. Dans cette première étape, on montre, par récurrence, l'existence d'une suite d'applications strictement croissantes $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q., pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

L'existence de ψ_1 découle du fait que la suite $(T_n(f_1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ (en effet, on a $|T_n(f_1)| \le C\|f_1\|_F$). Puis, pour $p \ge 1$, en supposant $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits, on utilise le fait que la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_p(n)}(f_{p+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$. On obtient l'existence d'une application strictement croissante ψ_{p+1} de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ t.q. la suite $(T_{\psi_1\circ\ldots\circ\psi_{p+1}(n)}(f_{p+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 2 (procédé diagonal). On note φ_n l'application $\psi_1 \circ \ldots \circ \psi_n$. La deuxième étape consiste à définir ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$\psi(n) = \varphi_n(n), \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

La fonction ψ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On va montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. En effet, soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n > p$, on a :

$$\psi(n) = \psi_1 \circ \ldots \circ \psi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)) = \varphi_p(\psi_{p+1} \circ \ldots \circ \psi_n(n)).$$

La suite $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc extraite de la suite $(T_{\varphi_p(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $n = p$. Ceci prouve que $(T_{\psi(n)}(f_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Etape 3. On utilise maintenant la densité de A dans F. L'étape 2 nous donne, pour tout $g \in A$, la convergence dans $\mathbb{R}$ de la suite $(T_{\psi(n)}(g))_{n\in\mathbb{N}}$. La densité de A dans F et le fait que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F' nous permet d'en déduire que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ pour tout $f \in F$. En effet, soit $f \in F$. Pour tout $g \in A$ et tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a

$$|T_{\psi(n)}(f) - T_{\psi(m)}(f)| \le 2C\|f - g\|_F + |T_{\psi(n)}(g) - T_{\psi(m)}(g)|.$$

On en déduit facilement que la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc est convergente.

Pour tout $f \in F$, on note $T(f)$ la limite (dans $\mathbb{R}$) de la suite $(T_{\psi(n)}(f))_{n\in\mathbb{N}}$. Comme les applications T_n sont linéaires, l'application T est aussi linéaire (de F dans $\mathbb{R}$). Puis, comme $\|T_n\|_{F'} \le C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $|T(f)| \le C\|f\|_F$ pour tout $f \in F$. On a donc $T \in F'$ et, finalement, $T_{\psi(n)} \to T$ $*$-faiblement dans F', quand $n \to +\infty$. Ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 8.19 s'applique aux suites bornées de $L^\infty(\Omega)$. En effet, grâce au théorème 6.70 et à la proposition 8.15, l'espace $L^\infty(\Omega)$ peut être identifié au dual de l'espace $L^1(\Omega)$, qui est un espace séparable (Ω est ici un borélien de $\mathbb{R}^N$). On a donc, par exemple, le résultat suivant :

Proposition 8.20 (Compacité faible-$*$ séquentielle des bornés de L^∞) *Soit $d \ge 1$. On note L^∞ l'espace $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^∞, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_\infty \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^\infty$ t.q. $u_n \to u$ $*$-faiblement dans L^∞.*

Dans le cas $p \in]1, +\infty[$, on peut écrire une propriété de compacité faible :

Proposition 8.21 (Compacité faible séquentielle des bornés de L^p) *Soit $d \geq 1$ et soit $p \in]1,+\infty[$. On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^p, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\|u_n\|_p \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une sous-suite, encore notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $u \in L^p$ t.q. $u_n \to u$ faiblement dans L^p, c'est-à-dire t.q. $\int (u_n v - uv) dm \to 0$ pour tout $v \in L^q$, où $q = \frac{p}{p-1}$.*

On donne maintenant une conséquence, très utile pour les probabilités, de la proposition 8.19. Cette conséquence a déjà été évoquée dans la remarque 6.95.

Proposition 8.22 (Convergence étroite d'une suite tendue) *Soit $d \geq 1$ et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. On suppose que $\sup_{n\in\mathbb{N}} m_n(\mathbb{R}^d) < +\infty$. Il existe alors une sous-suite, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ notée m t.q.*

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

De plus, si la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, on a alors $m_n \to m$ étroitement. (Ce dernier résultat est aussi vrai si on remplace l'hypothèse "$(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue" par "$m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R}^d)$").

Démonstration – On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) = \{\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),\ \varphi(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty\}$. On munit $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire $\|\varphi\|_u = \sup\{|\varphi(x)|,\ x \in \mathbb{R}^d\}$. L'espace $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, muni de cette norme, est un espace de Banach séparable (alors que l'espace $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ muni de cette même norme n'est pas séparable).

On note E l'espace $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (muni de la norme de la convergence uniforme). Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi \in E$, on pose $L_n(\varphi) = \int \varphi dm_n$. La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée dans E', car on a

$$\|L_n\|_{E'} \leq m_n(\mathbb{R}^d).$$

Il existe donc une sous-suite de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et il existe $L \in E'$ t.q.

$$\int \varphi dm_n \to L(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in E.$$

L'application L est donc une application linéaire positive (c'est-à-dire $\varphi \geq 0 \Rightarrow L(\varphi) \geq 0$) de E dans $\mathbb{R}$. D'après le chapitre 5, il existe alors une mesure finie m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $L(\varphi) = \int \varphi dm$ pour tout $\varphi \in E$ (en fait le théorème 5.12 donne ce résultat pour $d = 1$, la démonstration est semblable pour $d > 1$). Ceci donne bien le résultat annoncé, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

Il est intéressant de noter que si m_n est pour tout $n \in \mathbb{N}$ une probabilité, la mesure m n'est pas forcément une probabilité et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut ne pas converger étroitement vers m. (Un exemple pour $d = 1$ consiste à prendre $m_n = \delta_n$ et $m = 0$.)

Toutefois, si on suppose que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (ou si on suppose que $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$), la proposition 6.94 (ou la proposition 6.87 pour le cas $m_n(\mathbb{R}^d) \to m(\mathbb{R})$) donne la convergence étroite de m_n vers m, c'est-à-dire

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

■

Du point de vue des probabilités, la conséquence de la proposition 8.22 est que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r. dont la suite des lois est tendue, il existe alors une v.a.r. X et une sous-suite de la suite X_n telle que cette sous-suite converge en loi vers X (cf. proposition 9.21 pour le cas de vecteurs aléatoires).

8.5 Exercices

Exercice 8.1 (Densité de $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ dans $L^p(\Omega)$) Soient, $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $C_c(\Omega,\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\Omega)$, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R})$ t.q. $\|f-\varphi\|_p \leq \varepsilon$. [Reprendre la démonstration de l'exercice 6.4 qui traite le cas $\Omega = \mathbb{R}$. Utiliser le résultat de régularité, proposition 7.17.]

Exercice 8.2 (Continuité en moyenne) Soient $N \geq 1$, $p \in [1,+\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$. [Reprendre la démonstration vue pour $N = 1$ dans l'exercice 6.4]

Exercice 8.3 (Convergence après translation)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}(\mathbb{R}^N),\lambda_N)$, $N \geq 1$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de L^p et $u \in L^p$ tel que $u_n \to u$ dans L^p. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^N$ telle que $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$.

1. On suppose que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que $u_n(\cdot+h_n) \to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$.
2. On suppose $p = +\infty$. Donner un exemple pour lequel $u_n(\cdot+h_n) \not\to u$ dans L^p quand $n \to +\infty$ (on pourra se limiter a $N = 1$).

Exercice 8.4 (Non densité de C_c dans L^∞) On considère $f = 1_{\mathbb{R}_+}$ (qui appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, en confondant f avec sa classe).

1. Montrer que $\|f-\varphi\|_\infty \geq \frac{1}{2}$ pour tout $\varphi \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\|f(\cdot+h)-f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}*$.

Exercice 8.5 (Séparabilité de $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$) Soient $N \geq 1$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p tel que $1 \leq p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.

On pourra se limiter au cas $\Omega = \mathbb{R}$ et raisonner ainsi : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $q = 0,1,\ldots,2n^2-1$, on note : $I_q^n = [-n+\frac{q}{n},-n+\frac{q+1}{n}[$. On pose : $A_n = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f|_{I_q^n} = r$, où $r \in \mathbb{Q}$, et $f = 0$ sur $[-n,n[^c\}$. On pose $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

1. Montrer que A est dénombrable.
2. Montrer que, pour tout $f \in C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$.
3. Conclure par la densité de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R},)$ (théorème 8.4).

Exercice 8.6 (Non séparabilité de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$) On note B l'ensemble des f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R},T,\lambda)$ t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f = 0$ p.p. sur $]n,n+1[$ ou $f = 1$ p.p. sur $]n,n+1[$.

1. Montrer que B est non dénombrable. [Construire une injection de l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dans B.]
2. Soit A une partie dense de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$. Montrer que pour tout $f \in B$, il existe $g \in A$ t.q. $\|f-g\|_\infty \leq \frac{1}{4}$. En déduire qu'on peut construire une application injective de B dans A.
3. Montrer que $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},T,\lambda)$ n'est pas séparable.

Exercice 8.7 (Convolution $L^p - L^q$) Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ et $L^p = L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

1. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$, $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $f(\cdot)g(x-\cdot)$ est intégrable.
   On peut donc définir $(f*g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $|(f*g)(x)| \leq \|f\|_p\|g\|_q$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $1 < p < +\infty$, $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer qu'on peut définir $F * G$ sur $\mathbb{R}$ en posant $F * G = f * g$, avec $f \in F$ et $g \in G$. [Il suffit donc de démontrer que $f * g$ ne dépend pas du choix de f dans F et g dans G.]

(b) Montrer que l'application $(F, G) \mapsto F * G$ est bilinéaire continue de $L^p \times L^q$ dans $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on rappelle que $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme).

(c) Soit $F \in L^p$ et $G \in L^q$. Montrer que $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (c'est-à-dire que la fonction $F * G$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que $(F * G)(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).

3. On prend maintenant $p = 1$ et $q = +\infty$.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}^1$ et $g \in \mathcal{L}^\infty$. Montrer que $(f * g)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f * g \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Soit $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$. Montrer que $(F * G)(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ en posant $F * G = f * g$, avec $f \in F$ et $g \in G$.

(c) L'application $(F, G) \mapsto F * G$ est-elle continue de $L^1 \times L^\infty$ dans C_b ?

(d) A-t-on $F * G \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $F \in L^1$ et $G \in L^\infty$?

Exercice 8.8 (Caractérisation d'une fonction par son action sur C_c^∞) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que λ_d est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ et que l'élément d'intégration par rapport à λ_d est noté dx (au lieu de $d\lambda_d(x)$). On rappelle aussi que $|\cdot|$ dénote la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$. On se donne une fonction $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. :

- $\rho(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$, $|x| \geq 1$,
- $\rho(x) \geq 0$ si $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\int \rho(x)dx = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note ρ_n la fonction définie par $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$, de sorte que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de noyaux régularisants (voir le chapitre 8 du cours).

1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Montrer que $f\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

On suppose maintenant que $\int f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $f * \rho_n(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que $f * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

(c) Montrer que $f = 0$ p.p..

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (c'est-à-dire que g est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $g1_K \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ pour tout compact K de Ω).

(a) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que $g\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. (La fonction φ est prolongée par 0 hors de Ω.)

On suppose maintenant que $\int g(x)\varphi(x)dx = 0$ pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R})$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_n l'ensemble des $x \in \Omega$ t.q. $|x - y| > \frac{1}{n}$ pour tout $y \in \Omega^c$. Montrer $g * \rho_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \Omega_n$ et que $g * \rho_n(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega_n$.

(c) Soit K un compact de Ω, montrer que $g1_K = 0$ p.p.. En déduire que $g = 0$ p.p. sur Ω.

Exercice 8.9 (Théorème de compacité dans L^1, Kolmogorov)
On pose $L^1(]0,1[) = L^1_{\mathbb{R}}(]0,1[,\mathcal{B}(]0,1[),\lambda)$ et $L^1(\mathbb{R}) = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ (où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ou sa trace sur $\mathcal{B}(]0,1[)$). Pour $f \in L^1(]0,1[[)$, on identifie f avec l'un de ses représentants et on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f} = f$ sur $]0,1[$ et $\tilde{f} = 0$ sur $\mathbb{R}\setminus]0,1[$.

Soit $\mathcal{A}$ une partie de $L^1(]0,1[)$.

On rappelle que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est précompacte (c'est-à-dire que pour $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $f_1,\ldots,f_p \in \mathcal{A}$ t.q. $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(f_i,\varepsilon)$, où $B(f,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $L^1(]0,1[)$ de centre f et de rayon ε).

Partie I (Condition suffisante). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie bornée de $L^1(]0,1[)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ t.q. :

$$h \in \mathbb{R}, |h| \leq \alpha, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f}(\cdot + h) - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \tag{8.4}$$

Partie II (Condition nécessaire). On suppose, dans cette partie, que $\mathcal{A}$ une partie bornée de $L^1(]0,1[)$ et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ vérifiant (8.4).

Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\rho \geq 0$, $\rho(x) = 0$ si $|x| \geq 1$ et $\int \rho(x)dx = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit ρ_n par $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q. :

$$n \in \mathbb{N}^*, n \geq n_0, f \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\tilde{f} * \rho_n - \tilde{f}\|_1 \leq \varepsilon. \tag{8.5}$$

   [On pourra remarquer que $\tilde{f} * \rho_n(x) - \tilde{f}(x) = \int (\tilde{f}(x - \frac{y}{n}) - \tilde{f}(x))\rho(y)dy$.]

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{A}$, on note f_n la restriction à $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f} * \rho_n$.

   (a) Montrer qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de n, ρ et de la borne de $\mathcal{A}$ dans $L^1(]0,1[)$ t.q. :

$$x \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x)| \leq C_1,$$

$$x, y \in [0,1],\ f \in \mathcal{A} \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq C_2|x - y|.$$

   En déduire que l'ensemble $\{f_n,\ f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $C([0,1], \mathbb{R})$ [Utiliser le théorème d'Ascoli (théorème 8.17).]

   (b) Montrer que l'ensemble $\{f_n, f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans $L^1(]0, 1[\ )$.

3. Montrer que la partie $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $L^1(]0,1[)$.

Exercice 8.10 (Théorème de Kolmogorov, autre énoncé) Soit $T > 0$. On note L^1 l'espace $L^1_{\mathbb{R}}(]0,T[,\mathcal{B}(]0,T[),\lambda)$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de L^1 (on a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$).
On suppose que pour tout $h \in]0,T[$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{T-h} |u_n(t+h) - u_n(t)|dt \leq \eta(h),$$

où η est une fonction croissante de $]0,T[$ dans $\mathbb{R}_+$ t.q. $\lim_{h\to 0^+} \eta(h) = 0$.
L'objectif de l'exercice est de démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compact dans L^1.

1. Soit $d, h \in]0, T[$ t.q. $d + h \leq T$. Montrer que

$$\int_0^d |u_n(t)| dt \leq \int_0^d |u_n(t+h)| dt + \int_0^d |u_n(t+h) - u_n(t)| dt. \tag{8.6}$$

2. Soit $h_0 \in]0, T[$ et $d \in]0, T - h_0[$, montrer que

$$h_0 \int_0^d |u_n(t)| dt \leq d \|u_n\|_1 + h_0 \eta(h_0). \tag{8.7}$$

3. Montrer que $\int_0^d |u_n(t)| dt \to 0$ quand $d \to 0^+$, uniformément par rapport à n.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans L^1.
[Appliquer le théorème de Kolmogorov, théorème 8.16, qui utilise le prolongement de u_n par 0.]