Chapitre 10

Transformation de Fourier

10.1 Introduction et notations

La notion de série de Fourier permet d'analyser les fonctions définies d'un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), et donc aussi les fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). La notion de transformée de Fourier permet d'analyser les fonctions définies de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$) dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Les deux notions ont une multitude d'applications en physique et en mathématiques. La transformée de Fourier est une notion employée par exemple en théorie du signal, en théorie des probabilités et pour l'analyse des équations aux dérivées partielles.

Dans toute la suite, on considérera l'espace mesuré $(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et on notera $d\lambda_{\mathrm{N}}(x) = dx$. Soit $\mathrm{N} \geq 1$, les espaces $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ ont été définis dans la section 4.10 et les espaces $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ ont été définis dans la section 6.2. On rappelle aussi que si f est une fonction définie de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$, la fonction f est mesurable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont mesurables (chaque ensemble, $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, étant muni de sa tribu borélienne). On peut, bien sûr, aussi définir les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ et $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.1 (Espaces $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$)
Soit $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ *et* f *une fonction mesurable de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *dans* $\mathbb{C}$ *(c'est-à-dire* $f^{-1}(\mathrm{A}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$*).*
On dit que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ *si* $|f| \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ *et on définit* $\|f\|_p$ *par* $\|f\|_p = \||f|\|_p$ *où* $\||f|\|_p$ *est la norme de* $|f|$ *dans* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ *(vue au chapitre 6).*
L'espace $\mathrm{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ *est l'espace* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ *quotienté par le relation d'équivalence "= p.p.".*
C'est un espace de Banach (complexe), c'est-à-dire un e.v.n. (sur $\mathbb{C}$*) complet.*

Remarque 10.2 Soit $\mathrm{N} \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ et f une fonction définie de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ dans $\mathbb{C}$. Il est facile de voir que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$ si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$.

10.2 Transformation de Fourier dans L^1

10.2.1 Définitions et premières propriétés

Soit $N \geq 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_N)^t \in \mathbb{R}^N$ et $t = (t_1, \ldots, t_N)^t \in \mathbb{R}^N$, on note $x \cdot t$ le produit scalaire euclidien de x et t, c'est-à-dire $x \cdot t = \sum_{i=1}^N x_i t_i$. Dans ce chapitre, On note aussi $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ ou parfois simplement $L^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \lambda_N)$, pour $p \in [1, \infty]$.

Définition 10.3 (Transformée de Fourier dans L^1) *Soit $N \geq 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. Pour $t \in \mathbb{R}^N$, l'application $x \mapsto e^{-ix\cdot t} f(x)$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) appartient à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. On définit alors $\widehat{f}(t)$ par :*

$$\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int f(x) e^{-ix\cdot t} dx.$$

La fonction $\widehat{f}$ (définie de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$) s'appelle transformée de Fourier de f, qu'on notera également $\mathcal{F}(f)$.

On note $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C}) = \{g \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ t.q. $g(t) \to 0$ quand $|t| \to +\infty\}$. On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme, c'est-à-dire :

$$\|\varphi\|_u = \max_{x \in \mathbb{R}^N} |\varphi(x)|.$$

Proposition 10.4 (Linéarité de la transformée de Fourier) *Soit $N \geq 1$. L'application $\mathcal{F}$ qui à f (appartenant à $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$) associe sa transformée de Fourier est linéaire continue de $L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ dans $C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.*

DÉMONSTRATION – Le théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.52) appliqué à la fonction $(x, t) \mapsto e^{-ix.t} f(x)$ entraîne immédiatement que $\widehat{f}$ est continue. Montrons que $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Cas $N = 1$. On remarque que pour $t \neq 0$, on a, comme $e^{i\pi} = -1$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t})t} f(x) dx,$$

et donc avec un changement de variable simple,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-iyt} f(y + \frac{\pi}{t}) dy.$$

On en déduit que

$$2\widehat{f}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ixt} (f(x) - f(x + \frac{\pi}{t})) dx$$

et donc que $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t})\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 5.21) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

Cas $N > 1$. On reprend la même méthode.

Pour $t \neq 0$, $t = (t_1, \ldots, t_N)^t$, il existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ t.q. $|t_j| = \max_{k=1,\ldots,N} |t_k|$. On a alors, comme $e^{i\pi} = -1$, en notant e_j le j–ième vecteur de base de $\mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-i(x-\frac{\pi}{t_j}e_j)\cdot t} f(x) dx,$$

et donc avec un changement de variable simple,

$$\widehat{f}(t) = -(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int e^{-iy\cdot t} f(y + \frac{\pi}{t_j} e_j) dy.$$

On en déduit que $|\widehat{f}(t)| \le \frac{1}{2}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\|f(\cdot) - f(\cdot + \frac{\pi}{t_j}e_j)\|_1$. Le théorème de continuité en moyenne dans L^1 (théorème 8.5) donne alors le fait que $\widehat{f}(t) \to 0$ quand $|t| \to \infty$.

■

La transformée de Fourier a la propriété intéressante de transformer la convolution en produit. Ceci est montré dans la proposition suivante.

Proposition 10.5 (Transformée de Fourier d'un produit) *Soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}\widehat{g}$.*

DÉMONSTRATION – Par la proposition 7.22, on a $f * g \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et pour p.p. $x \in \mathbb{R}^N$, $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$. On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$,

$$\widehat{f * g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)dy \right) e^{-ix\cdot t}dx =$$

$$(2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}dy \right) dx.$$

En appliquant le théorème de Fubini (théorème 7.12) à la fonction

$$(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)e^{-i(x-y)\cdot t}e^{-iy\cdot t}$$

(qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^{2N}$ car son module est la fonction $(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)|$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}^{2N}$ est égale à $\|f\|_1\|g\|_1$), on obtient :

$$\widehat{f * g}(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \left(\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx \right) g(y)e^{-iy\cdot t}dy.$$

Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\int f(x-y)e^{-i(x-y)\cdot t}dx = \int f(z)e^{-iz\cdot t}dz = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(t)$, on en déduit :

$$\widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t) \int g(y)e^{-iy\cdot t}dy = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\widehat{f}(t)\widehat{g}(t),$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

10.2.2 Théorème d'inversion

Il est naturel de se poser les deux questions suivantes :

- La transformée de Fourier d'une fonction f caractérise-t-elle la fonction f (c'est-à-dire si $\widehat{f} = \widehat{g}$, a-t-on $f = g$ p.p.) ?
- Peut-on retrouver la fonction à partir de sa transformée de Fourier ?

Les réponses à ces questions sont fournies par le théorème d'inversion de Fourier :

Théorème 10.6 (Inversion partielle de la transformée de Fourier) *Soit $N \ge 1$ et $f \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. On a alors $f = \widehat{\widehat{f}}(-.)$ p.p., c'est-à-dire :*

$$f(t) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int \widehat{f}(x)e^{ixt}dx, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}^N.$$

La démonstration fait l'objet de l'exercice 10.1.

Une conséquence de ce théorème est l'injectivité de l'application $\mathcal{F}$, qui fournit donc une réponse positive à la première question. En effet, soient f et $g \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{f} = \widehat{g}$; alors par linéarité, $\widehat{f-g} = 0$ et donc $\widehat{f-g} \in L^1_{\mathbb{C}}$. En appliquant le théorème d'inversion, on a donc $f = g$ p.p..

Ce théorème apporte aussi une réponse partielle à la deuxième : on peut calculer f à partir de $\widehat{f}$ dès que $\widehat{f} \in L^1_{\mathbb{C}}$. Il faut remarquer à ce propos que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier (voir exercice 10.2).

10.2.3 Régularité et décroissance à l'infini

Proposition 10.7 (Différentiabilité, dimension 1)

1. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ t.q. $f' \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où f' est la dérivée de f). Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f')(t) = (it)\mathcal{F}(f)(t)$.*
2. *Soit $f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ t.q. $(\cdot)f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ (où $(\cdot)f$ est l'application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $xf(x)$). Alors, $\mathcal{F}(f) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(f)'(t) = \mathcal{F}((-i\cdot)f)(t)$.*

DÉMONSTRATION – La démonstration du premier item consiste à faire une intégration par parties sur l'intervalle $[-n,n]$ puis à faire tendre n vers l'infini (en remarquant que $f(\pm n) \to 0$, quand $n \to +\infty$, voir l'exercice 5.6).

Le deuxième item est une conséquence immédiate du théorème 4.53 (théorème de dérivation sous le signe $\int$). ■

La transformation de Fourier transforme donc la dérivation en multiplication par la fonction $(i\cdot)$, et la multiplication par $(-i\cdot)$ en dérivation. Cette propriété est utilisée, par exemple, pour la résolution d'équations différentielles (qui sont ainsi transformées en équations algébriques).

Cette propriété se généralise au cas de la dimension N et pour un ordre k de dérivation quelconque. On introduit pour ce faire les notations suivantes : soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^t \in \mathbb{N}^N$ un multi-indice et f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. On définit $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_N$ et

$$D^\alpha f = \Big(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}\Big) f$$

lorsque cette dérivée existe.

Proposition 10.8 (Différentiabilité, dimension N)

1. *Soit $N \geq 1$ et $k \geq 1$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ t.q. $D^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ t.q. $|\alpha| \leq k$, avec $(it)^\alpha = (it_1)^{\alpha_1}(it_2)^{\alpha_2} \ldots (it_N)^{\alpha_N}$.*
2. *Soit f t.q. $(.)^\alpha f \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$. Alors, $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ et $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{(-i\cdot)^\alpha f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq k$.*

La proposition 10.8 montre que la dérivabilité de f entraîne la décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini (plus f est dérivable, plus $\widehat{f}$ décroît vite à l'infini), et réciproquement. Cette remarque incite à définir l'espace des fonctions à décroissance rapide (souvent appelé espace de Schwartz),

Définition 10.9 (Espace de Schwartz) *Soit $N \geq 1$, on appelle espace de Schwartz, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ ou $\mathcal{S}_N$ ou même $\mathcal{S}$, l'espace des fonctions dites à décroissance rapide, défini par :*

$$\mathcal{S}_N = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C}) \text{ t.q. pour tout } \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{N}^N, \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(x)^\alpha D^\beta f(x)| < +\infty\}.$$

On va montrer l'invariance par transformation de Fourier de cet espace. On commence par remarquer que $\mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. En effet, si $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$, en prenant des choix convenables de α et β dans la définition de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$, on remarque qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ t.q. $(1+|x|^{\mathrm{N}+1})|f(x)| \le \mathrm{C}$. On en déduit que $f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Plus généralement, si $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$, on remarque que $(\cdot)^\beta \mathrm{D}^\alpha f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ pour tout $a, \beta \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. On obtient alors la proposition 10.10.

Proposition 10.10 (Transformée de Fourier et dérivation dans $\mathcal{S}$) *Soit* $\mathrm{N} \ge 1$ *et* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$. *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^\mathrm{N}$ *on a :*

$$\mathcal{F}\Big(\mathrm{D}^\alpha((-i\cdot)^\beta f)\Big) = (i\cdot)^\alpha \widehat{(-i\cdot)^\beta f} = (i\cdot)^\alpha \mathrm{D}^\beta \widehat{f}, \tag{10.1}$$

$$\mathcal{F}[(-i\cdot)^\alpha \mathrm{D}^\beta f] = \mathrm{D}^\alpha \widehat{\mathrm{D}^\beta f} = \mathrm{D}^\alpha[(i\cdot)^\beta \widehat{f}]. \tag{10.2}$$

La démonstration est une adaptation simple de celle de la proposition 10.8.
La proposition 10.10 et le théorème 10.6 nous permettent alors de remarquer que la transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$.

Proposition 10.11 (Transformée de Fourier dans S_N) *Soit* $\mathrm{N} \ge 1$. *L'application $\mathcal{F}$ qui à f associe sa transformée de Fourier est une bijection de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$, on a $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$.*

DÉMONSTRATION – En utilisant la proposition 10.10, on montre facilement que $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$. Le théorème d'inversion (théorème 10.6) donne alors que f est injective et que $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ pour tout $f \in \mathcal{S}_\mathrm{N}$. De cette dernière formule, on déduit que $\mathcal{F}$ est surjective (et donc bijective) de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathcal{S}_\mathrm{N}$. ■

10.3 Transformée de Fourier d'une mesure signée

Il est facile d'étendre la définition de la transformation de Fourier à une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. Plus précisément, si m est une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ ($\mathrm{N} \ge 1$), la définition 10.12 définit la fonction $\widehat{m}$ (continue et bornée de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{C}$) et, si $m = f\lambda_\mathrm{N}$, avec $f \in \mathrm{L}^1_\mathbb{R}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), \lambda_\mathrm{N})$ (c'est-à-dire que m est la mesure signée de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$), on a $\widehat{m}(t) = \widehat{f}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$. De même, si m est une mesure à valeurs complexes, on a alors $m = m_1 + im_2$, où m_1 et m_2 sont des mesures signées (ce sont les parties réelle et imaginaire de m). On peut alors définir $\widehat{m}$. C'est la fonction continue bornée de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $\widehat{m}(t) = \widehat{m}_1(t) + i\widehat{m}_2(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$.

Définition 10.12 (Transformée de Fourier d'une mesure signée) *Soit* $\mathrm{N} \ge 1$ *et m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$. Soit $t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}$, l'application $x \mapsto e^{-ix\cdot t}$ (définie de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{C}$) appartient à $\mathrm{L}^1_\mathbb{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathrm{N}), m)$ (car elle est continue, donc borélienne, et bornée). On définit alors $\widehat{m}(t)$ par :*

$$\widehat{m}(t) = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int e^{-ix\cdot t} dm(x).$$

La fonction $\widehat{m}$ (définie de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ dans $\mathbb{C}$) s'appelle transformée de Fourier de m.

On rappelle que

$$\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C}) \text{ t.q. } \sup_{t \in \mathbb{R}^\mathrm{N}} |g(t)| < \infty\}$$

et que $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme de la convergence uniforme.

Proposition 10.13 *Soit* $N \geq 1$. *Soit* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^N$. *La fonction* $\widehat{m}$ *appartient à* $C_b(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION – Le fait que $\widehat{m}$ est bornée est simple. On utilise la décomposition de Hahn (proposition 2.33), c'est-à-dire le fait que $m = m^+ - m^-$, où $m^\pm$ sont deux mesure finies étrangères. On remarque alors que, pour tout $t \in \mathbb{R}^N$, on a $|\widehat{m}(t)| \leq |m|(\mathbb{R}^N) < +\infty$, où $|m| = m^+ + m^-$.

La fait que $\widehat{m}$ est continue est une conséquence immédiate du théorème de continuité sous le signe $\int$ (théorème 4.52) appliqué à la fonction $(x,t) \mapsto e^{-ix.t}$ (et avec les mesures finies $m^\pm$). ■

Comme pour la transformation de Fourier dans L^1, on peut se demander si $\widehat{m}$ caractérise la mesure signée m et si on peut retrouver m à partir de $\widehat{m}$. La proposition suivante s'intéresse à ces deux questions.

Proposition 10.14 *Soit* $N \geq 1$.

1. *Soit* m *et* μ *deux mesures signées sur les boréliens de* $\mathbb{R}^N$. *On suppose que* $\widehat{m} = \widehat{\mu}$. *alors,* $m = \mu$.
2. *Soit* m *une mesure signée sur les boréliens de* $\mathbb{R}^N$. *On suppose que* $\widehat{m} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$. *Alors,* $m = f\lambda_N$ *avec* $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$ *p.p. (c'est-à-dire p.p. pour la mesure* λ_N*).*

La démonstration de cette proposition fait l'objet de l'exercice 10.6.
Nous avons vu dans la section précédente qu'il y avait un lien entre les propriétés de décroissance de f à l'infini et les propriétés de régularité de $\widehat{f}$ (propositions 10.7, 10.8 et 10.10). Dans le même esprit, on peut remarquer que, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, borélienne et intégrable, la continuité de $\widehat{f}$ en 0 donne une précision sur la convergence vers 0, quand $a \to +\infty$, de $\int_{]-a,a[^c} |f(x)|dx$. Nous donnons dans le lemme 10.15 cette précision dans le cas plus général d'une mesure (positive) finie. Ce lemme permet de démontrer le théorème 10.22 (lui-même utile pour démontrer le théorème central limite, théorème 10.24).

Lemme 10.15 *Soit* m *une mesure (positive) finie (et non nulle) sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *On pose* $M = m(\mathbb{R})$ *et, pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{m}(t) + \widehat{m}(-t)}{2}.$$

(La fonction ψ *prend donc ses valeurs dans* $\mathbb{R}$, *et même dans* $[-M, M]$, *est continue en* 0 *et* $\psi(0) = M$.*) On a alors, pour tout* $a > 0$,

$$m(\{x, |x| \geq a\}) \leq a\int_0^{2/a} (M - \psi(t))dt.$$

DÉMONSTRATION – On peut supposer $M = 1$ (il suffit, si $M \neq 1$, de remplacer la mesure m par la mesure m/M). On remarque tout d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\widehat{m}(t) + \widehat{m}(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} (e^{-ixt} + e^{ixt})dm(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \cos(xt)dm(x).$$

et donc

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)dm(x).$$

On en déduit bien que $\psi(t) \in \mathbb{R}$, $|\psi(t)| \leq 1$ et que $\psi(0) = 1$.

Soit $a > 0$, on pose $\varepsilon = 2/a$ et $T = \int_0^\varepsilon (1 - \psi(t))dt$. En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli (théorème 7.7) on obtient

$$\begin{aligned} T = \int_0^\varepsilon \Big(\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(xt))dm(x)\Big)dt &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_0^\varepsilon (1 - \cos(xt))dt\Big)dm(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x})dm(x). \end{aligned}$$

Mais, $(\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) = \varepsilon(1 - \frac{\sin(\varepsilon x)}{\varepsilon x}) \geq \varepsilon/2$ si $|\varepsilon x| \geq 2$, ce qui est vrai si $|x| \geq a$ car $\varepsilon a = 2$. On a donc (comme $(\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) \geq 0$ pour tout x)

$$\mathrm{T} = \int_{\mathbb{R}} (\varepsilon - \frac{\sin(\varepsilon x)}{x}) dm(x) \geq \frac{\varepsilon}{2} m(\{x, |x| \geq a\}).$$

On obtient donc, finalement,

$$m(\{x, |x| \geq a\}) \leq \frac{2\mathrm{T}}{\varepsilon} \leq \frac{2}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} (1 - \psi(t)) dt = a \int_0^{2/a} (1 - \psi(t)) dt.$$

Ce qui est le résultat annoncé. ■

10.4 Transformation de Fourier dans L^2

On aimerait ici définir la transformée de Fourier d'un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) = \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}), \lambda_{\mathrm{N}})$. On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ est un espace de Hilbert et que le produit scalaire sur $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ est défini par (en notant $dt = d\lambda_{\mathrm{N}}(t)$) :

$$(f \mid g)_2 = \int f(t)\overline{g(t)} dt.$$

Il est clair que la définition de $\widehat{f}$ qu'on a donnée pour $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ ne s'applique pas pour un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Pour définir la transformée de Fourier d'un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, on va utiliser la densité de $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ (on peut montrer que $\mathcal{S}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, comme on a montré que $\mathcal{S}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$). On va d'abord remarquer que la transformée de Fourier envoie $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ et que c'est une isométrie pour la norme de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. On utilisera ensuite la densité de $\mathcal{S}_{\mathrm{N}}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ pour définir la transformée de Fourier des éléments de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

Proposition 10.16 *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$ *et* $f, g \in \mathcal{S}_{\mathrm{N}}$ *(on a donc, en particulier,* $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$*). Alors* $\widehat{f}$ *et* $\widehat{g}$ *sont des éléments de* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *et* $(f \mid g)_2 = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2$. *En particulier,* $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Démonstration – Soit $f, g \in \mathcal{S}_{\mathrm{N}}$. On a alors aussi $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathcal{S}_{\mathrm{N}}$. Comme $\mathcal{S}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, on a donc f, g, $\widehat{f}$, $\widehat{g} \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. On va montrer que $(f \mid g)_2 = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2$.

Comme $f, \widehat{f} \in \mathcal{S}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, on peut appliquer le théorème d'inversion (théorème 10.6) pour transformer le produit scalaire de f avec g.

Le théorème d'inversion donne $f = \widehat{\widehat{f}}(-\cdot)$ et donc :

$$(f \mid g)_2 = \int \widehat{\widehat{f}}(-t)\bar{g}(t)dt = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t} \widehat{f}(x)dx \right) \bar{g}(t)dt.$$

On utilise maintenant le théorème de Fubini (théorème 7.12). Il s'applique car $\widehat{f}, \bar{g} \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. On obtient :

$$(f \mid g)_2 = (2\pi)^{-\frac{\mathrm{N}}{2}} \int \left(\int e^{ix\cdot t} \bar{g}(t)dt \right) \widehat{f}(x)dx = \int \bar{\widehat{g}}(t)\widehat{f}(t)dt = (\widehat{f} \mid \widehat{g})_2,$$

ce qui termine la démonstration. ■

La proposition 10.16 permet de définir, par un argument de densité, la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.

Théorème 10.17 (Transformée de Fourier dans L^2, Plancherel) *Soit* $\mathrm{N} \geq 1$. *Il existe une application linéaire continue* $\tilde{\mathcal{F}}$ *de* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *dans* $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ *t.q. :*

1. Si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) \cap \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a alors $\tilde{\mathcal{F}}(f) = \widehat{f}$ p.p..

2. Pour tout $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a $(f \mid g)_2 = (\tilde{\mathcal{F}}(f) \mid \tilde{\mathcal{F}}(g))_2$.

3. Pour tout $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, on a $f = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$.

4. $\tilde{\mathcal{F}}$ est une bijection de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Pour $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ s'appelle la transformée de Fourier de f. Compte tenu du premier item, on notera en général, $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f si $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (et alors $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$) ou si $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (et alors $\widehat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f) \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$).

DÉMONSTRATION – L'application $f \mapsto \widehat{f}$ est définie sur $\mathcal{S}_\mathrm{N}$, qui est un sous espace de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, et prend ses valeurs dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (car $\mathcal{S}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, en confondant, comme d'habitude, un élément de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ avec l'un de ses représentants). Comme cette application est linéaire, continue pour la norme de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, et que $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ est dense dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ (car $\mathcal{S}_\mathrm{N} \supset C^\infty_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$ et $C^\infty_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, voir le théorème 8.14), on en déduit que cette application se prolonge (de manière unique) en une application, notée $\tilde{\mathcal{F}}$, linéaire continue de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$.

Plus précisément, soit $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Il existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mathrm{N}$ t.q. $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ quand $n \to +\infty$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. La proposition 10.16 donne alors que la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi de Cauchy dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Elle converge donc dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On aimerait définir $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ comme étant la limite (dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) de la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est possible à condition que cette limite ne dépende que de f et pas du choix de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ vers f. Or, ce dernier point est facile car si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ vers f, on a $\|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_2 = \|f_n - g_n\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. On a ainsi défini $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ dans lui même.

La linéarité de $\tilde{\mathcal{F}}$ découle immédiatement du fait que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ est linéaire de $\mathcal{S}_\mathrm{N}$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Enfin, soit $f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mathrm{N}$ t.q. $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. La proposition 10.16 donne que $\|\widehat{f_n}\|_2 = \|f_n\|_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on en déduit $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Ce qui prouve la continuité de $\tilde{\mathcal{F}}$ de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. On montre maintenant les 4 items du théorème.

1. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N}) \cap \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. En reprenant la démonstration du théorème 8.14, il est facile de voir qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^\mathrm{N}, \mathbb{C})$ t.q. $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ lorsque $n \to +\infty$ (car dans la démonstration du théorème 8.14, la suite construite pour converger vers f dans L^p ne dépend pas de p). On en déduit que $\widehat{f_n} \to \widehat{f}$ uniformément sur $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) et que $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ lorsque $n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) et donc que, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on peut supposer que $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ p.p. quand $n \to +\infty$. On en déduit bien que $\widehat{f} = \tilde{\mathcal{F}}(f)$ p.p..
2. Soit $f, g \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. Il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mathrm{N}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mathrm{N}$ t.q. $f_n \to f$, $g_n \to g$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$. La proposition 10.16 donne $(\widehat{f_n} \mid \widehat{g_n})_2 = (f_n \mid g_n)_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient bien $(\tilde{\mathcal{F}}(f) \mid \tilde{\mathcal{F}}(g))_2 = (f \mid g)_2$.
3. Soit $f \in \mathrm{L}^2$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mathrm{N}$ t.q. $f_n \to f$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ quand $n \to +\infty$. On a donc $\widehat{f_n} \to \tilde{\mathcal{F}}(f)$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, ce qui donne aussi $\widehat{f_n}(-\cdot) \to \tilde{\mathcal{F}}(f)(-\cdot)$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et donc $\widehat{\widehat{f_n}}(-\cdot) \to \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ quand $n \to +\infty$. La proposition 10.11 donne $f_n = \widehat{\widehat{f_n}}(-\cdot)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit donc (par unicité de la limite dans L^2) que $f = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathcal{F}}(f))(-\cdot)$ p.p..
4. L'injectivité de $\tilde{\mathcal{F}}$ (de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ dans $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$) découle du fait que $\|\tilde{\mathcal{F}}(f)\|_2 = \|f\|_2$ et que $\tilde{\mathcal{F}}$ est linéaire. La surjectivité est une conséquence immédiate du troisième item.

■

Remarque 10.18 Pour définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$, on aurait pu utiliser la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{C})$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^N)$ et ne pas introduire l'espace $\mathcal{S}_N$ (voir l'exercice 10.5 pour le cas $N = 1$).

10.5 Résolution d'une équation différentielle ordinaire ou d'une équation aux dérivées partielles

On donne ici deux exemples simples d'utilisation de la transformation de Fourier pour la résolution d'une équation différentielle (souvent notée EDO pour Équation Différentielle Ordinaire) ou d'une équation aux dérivées partielles (souvent notée EDP pour Équation aux Dérivées Partielles).

Soit $N \geq 0$, $(a_0,\ldots,a_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $g \in \mathcal{S}_1$ (donnés). On cherche $f \in \mathcal{S}_1$ qui vérifie :

$$a_N f^{(N)}(x) + \ldots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = g(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{10.3}$$

Si $f \in \mathcal{S}_1$ vérifie (10.3), elle vérifie nécessairement, par transformation de Fourier :

$$a_N \widehat{f^{(N)}}(t) + \ldots + a_1 \widehat{f'}(t) + a_0 \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

c'est-à-dire :

$$a_N (it)^N \widehat{f}(t) + \ldots + a_1 it \widehat{f}(t) + a_0 \widehat{f}(t) = \widehat{g}(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

En posant $p(t) = a_N(it)^N + \ldots + a_1 it + a_0$ et en supposant que p ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\widehat{f}(t) = \frac{\widehat{g}(t)}{p(t)}.$$

Comme $g \in \mathcal{S}_1$ et que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$, on peut montrer que $\frac{\widehat{g}}{p} \in \mathcal{S}_1$. En utilisant maintenant le théorème d'inversion, ou la proposition 10.11, on obtient :

$$f(t) = \widehat{\widehat{f}}(-t) = \widehat{\left(\frac{\widehat{g}}{p}\right)}(-t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{10.4}$$

On a donc montré que f est nécessairement donnée par (10.4). Réciproquement, il est facile de voir que la fonction donnée par (10.4) est solution de (10.3), c'est donc l'unique solution dans $\mathcal{S}_1$ de (10.3) (en supposant que p ne s'annule par sur $\mathbb{R}$).

Soit $N \geq 1$, on considère une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, de classe C^2 (c'est-à-dire deux fois continûment dérivable), dont on peut donc définir le Laplacien $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. On cherche à déterminer les fonctions harmoniques de $\mathcal{S}_N$, c'est-à-dire les fonctions $u \in \mathcal{S}_N$ telles que :

$$-\Delta u(x) = 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.5}$$

Cherchons $u \in \mathcal{S}_N$ (et donc $\Delta u \in \mathcal{S}_N$) solution de (10.5). On a donc $\widehat{\Delta u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), c'est-à-dire $|t|^2 \widehat{u}(t) = 0$ et donc $\widehat{u}(t) = 0$, pour tout $t \neq 0$. Comme $\widehat{u}$ est continue, ceci entraîne que $\widehat{u} = 0$ (partout sur $\mathbb{R}^N$), et donc $u = 0$. La fonction identiquement égale à 0 est donc la seule solution de (10.5) dans $\mathcal{S}_N$.

On peut effectuer un raisonnement analogue si on cherche u de classe C^2 et dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$ (on peut aussi le faire si u est seulement dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N)$, il faut alors convenablement définir Δu). On obtient encore que la seule solution de (10.5) est $u = 0$.

Par contre, ce résultat d'unicité n'est plus vrai si on ne demande pas à u d'être de carré intégrable. En effet, les fonctions constantes sont toutes solutions de (10.5) (et on peut montrer que ce sont les seules fonctions, de classe C^2et bornées, solutions de (10.5), c'est le théorème de Liouville en analyse complexe).

10.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

La transformée de Fourier a son équivalent en probabilités : il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire (rien à voir avec la fonction caractéristique d'un ensemble !).

Définition 10.19 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d. *On appelle fonction caractéristique de* X *la fonction de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iX\cdot u} dP = E(e^{iX\cdot u}), \text{ pour } u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans la définition précédente, la fonction $e^{iX\cdot u}$ est bien intégrable sur Ω (pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. En notant p_X la loi de X, on remarque également que $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\widehat{p}_X(-\cdot)$. La section 10.3 donne alors quelques propriétés élémentaires de la fonction caractéristique d'un v..a..

Proposition 10.20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d. *La fonction caractéristique de* X *vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_X \in C_b(\mathbb{R}^d, C)$.
2. *La loi de* X *est entièrement déterminée par* φ_X *(c'est-à-dire que si* Y *est un autre v.a. de dimension* d *et que* $\varphi_X = \varphi_Y$*, on a nécessairement* $p_X = p_Y$*).*
3. *Si* $\varphi_X \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$*, la loi de* X *a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*, c'est-à-dire* $p_X = f\lambda_d$*, et :*
$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot u} \varphi_X(u) du, \;\; \lambda_d\text{-p.s. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION – Comme $\varphi_X = (2\pi)^{d/2}\widehat{p}_X(-\cdot)$, le premier item est donnée par la proposition 10.13 (qui donne $\widehat{p}_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$).

Le deuxième item est donnée par le premier item de la proposition 10.14.

Pour le troisième item, on remarque que le deuxième item de la proposition 10.14 donne $p_X = f\lambda_d$ avec $f = \widehat{\widehat{p_X}}(-\cdot)$, ce qui donne λ_d-p.s. en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t}\widehat{p_X}(t)dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot t}\varphi_X(t)dt.$$

■

Les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour montrer l'indépendance de v.a.r. (ou de v.a.). On donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition 10.21 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *d v.a.r.. Alors, les v.a.r* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ *sont indépendantes si et seulement si on a*

$$\varphi_{\mathrm{X}}(u) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{\mathrm{X}_j}(u_j)$$

pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$*, où* X *est le v.a. de composantes* $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$.

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 9.28 les v.a.r. $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ sont indépendantes si et seulement $p_{\mathrm{X}} = p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_d}$. Par la proposition 10.14, ces deux mesures sont égales si et seulement si leurs transformées de Fourier sont égales, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\varphi_{\mathrm{X}}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_d}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Comme $e^{ix\cdot u} = \prod_{j=1}^{d} e^{ix_j u_j}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d)^t$ et tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, la définition de la mesure produit donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{\mathrm{X}_1} \otimes \ldots \otimes p_{\mathrm{X}_d}) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{\mathrm{X}_j}(u_j),$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

Il est intéressant aussi de connaître le lien entre convergence en loi et convergence simple des fonctions caractéristiques. Nous donnons ce lien dans le deuxième item du théorème 10.22 (dû à Paul Lévy).

Théorème 10.22 (Convergence en loi et fonctions caractéristiques, Paul Levy) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *un suite de v.a. de dimension* d.

1. *On suppose que la fonction caractéristique de* X_n *converge simplement (quand* $n \to +\infty$*) vers une fonction* φ *continue en* 0*. Il existe alors un v.a.* X *t.q.* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *en loi, quand* $n \to +\infty$.
2. *Soit* X *un v.a. de dimension* d*. Alors,* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si et seulement si* $\varphi_{\mathrm{X}_n}(u) \to \varphi_{\mathrm{X}}(u)$*, quand* $n \to +\infty$*, pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$.

DÉMONSTRATION – Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier item. En effet, si $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$ en loi, on a, bien sûr, $\varphi_{\mathrm{X}_n}(u) \to \varphi_{\mathrm{X}}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ (car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$). Réciproquement, on suppose que $\varphi_{\mathrm{X}_n}(u) \to \varphi_{\mathrm{X}}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Comme la fonction φ_{X} est continue (et donc, en particulier continue en 0), le premier item donne que X_n converge en loi vers un v.a. Y. Mais ceci donne que X et Y ont même fonction caractéristique et donc même loi. On en déduit bien que X_n tend vers X en loi.

Nous démontrons maintenant le premier item du théorème 10.22. Cette démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape on montre que la suite des lois des X_n est tendue (on utilise ici le lemme 10.15 et la continuité de φ). Puis dans la seconde étape on conclut grâce à la proposition 9.21.

Etape 1. On montre dans cette étape que la suite des lois des X_n est tendue. Pour cela, il suffit de montrer que la suite des lois de chaque composante des X_n est tendue. Soit donc $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $(\mathrm{X}_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des i–ème composantes des X_n. On note m_n la loi de $\mathrm{X}_n^{(i)}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2}\varphi_{\mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{(i)}}(t) + \varphi_{\mathrm{X}_{\mathrm{N}}^{(i)}}(-t) = \sqrt{2\pi}\frac{\widehat{m}_n(t) + \widehat{m}_n(-t)}{2}$$

Le lemme 10.15 donne alors, pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq a \int_0^{2/a} (1 - \psi_n(t))dt. \tag{10.6}$$

On a $\varphi_{X_N^{(i)}}(t) = \varphi_{X_n}(te_i)$ (ou e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$), la fonction $\psi_n(t)$ converge donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa limite est une fonction ψ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) continue en 0. Comme $\psi_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\psi(0) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme ψ est continue en 0 et $\psi(0) = 1$, il existe $a_0 > 0$ t.q. $\max_{t\in[0,2/a_0]}(1 - \psi(t)) \le \varepsilon$, et donc

$$a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi(t))dt \le 2\varepsilon.$$

La fonction ψ_n converge simplement vers ψ et $0 \le (1 - \psi_n) \le 1$ le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi_n(t))dt = a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi(t))dt.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi_n(t))dt \le 3\varepsilon.$$

Avec (10.6) on a donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow m_n(\{x, |x| \ge a_0\}) \le 3\varepsilon.$$

D'autre part, en utilisant la continuité décroissante d'une mesure, pour tout $n \in \{1, \ldots, n_0 - 1\}$, il existe a_n t.q. $m_n(\{x, |x| \ge a_n\}) \le 3\varepsilon$.

En prenant $a = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$ on a donc

$$m_n(\{x, |x| \ge a\}) \le 3\varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue et termine la première étape.

Etape 2. Dans cette seconde étape il suffit d'utiliser la proposition 9.21. Cette proposition nous donne l'existence d'une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et d'un v.a. X tel que cette sous-suite tende vers X en loi. On en déduit, en particulier que $\varphi_X = \varphi$. Il reste à montrer que toute la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers X en loi (et pas seulement une sous-suite). Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi vers X, il existe $\phi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $E(\phi(X_n)) \not\to E(\phi(X))$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, que nous noterons aussi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (pour ne pas alourdir les notations), t.q.

$$|E(\phi(X_n)) - E(\phi(X))| \ge \varepsilon. \tag{10.7}$$

Mais, la proposition 9.21 nous donne l'existence d'une sous-suite de cette sous-suite et d'un v.a. Y t.q. la sous-suite de la sous-suite tende vers Y en loi. Comme la convergence en loi donne la convergence simple des fonctions caractéristiques (et que $\varphi_{X_n} \to \varphi$ simplement), on en déduit que $\varphi_Y = \varphi = \varphi_X$. On a donc $P_X = P_Y$. La sous-suite de la sous-suite tend donc vers X en loi. En contradiction avec (10.7). On a bien ainsi montré finalement que $X_n \to X$ en loi. ∎

On donne maintenant la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien.

Proposition 10.23 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* X *une v.a.r. gaussienne. On note* m *son espérance (donc,* $m = E(X) \in \mathbb{R}$*) et* σ^2 *sa variance (donc,* $\sigma^2 = E((X - m)^2) \ge 0$*) de sorte que* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*. On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2}, \textit{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

2. *Soit* $d \ge 1$ *et* X *une v.a gaussien de dimension* d*. On note* m *son espérance (donc,* $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$*) et* D *sa matrice de covariance (donc,* D *est une matrice symétrique, composantes d'indices* j *et* k *de* X*) de sorte que* $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ *(proposition 9.33). On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{1}{2}Du\cdot u}, \textit{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION – Soit X une v.a.r. gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. On suppose tout d'abord que $\sigma^2 = 0$, on a alors $X = m$ p.s. et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{imu}$, ce qui est bien la formule annoncée. On suppose maintenant que $\sigma > 0$, on a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy,$$

ce qui donne $\varphi_X(u) = e^{imu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\sigma u)$ avec $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $y \mapsto e^{y^2}$ est paire, on a aussi :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on remarque que le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique (théorème 4.53) et donne que ψ est de classe C^1 et

$$\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-y) \sin(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy.$$

En intégrant par parties cette dernière intégrale (en fait, on intègre par parties sur $[-n,n]$ puis on fait tendre n vers l'infini), on obtient :

$$\psi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} t \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy = -t\psi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $\psi(t) = \psi(0) e^{\frac{-t^2}{2}}$. Comme $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, on en déduit que $\psi(t) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{-t^2}{2}}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc que $\varphi_X(u) = e^{imu} e^{\frac{-\sigma^2 u^2}{2}}$, ce qui est bien la formule annoncée.

On suppose maintenant que $d > 1$ et que X est un v.a. gaussien. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a $\varphi_X(u) = E(e^{iX\cdot u}) = \varphi_{X\cdot u}(1)$. Pour connaître $\varphi_X(u)$, il suffit donc de connaître la fonction caractéristique de la v.a.r. $X \cdot u$. Comme X est un v.a. gaussien, la v.a.r. $X \cdot u$ est une v.a.r. gaussienne. Sa moyenne est $E(X \cdot u) = E(X) \cdot u = m \cdot u$ et sa variance est (voir l'exercice 9.5) :

$$\sigma^2 = E((X \cdot u - m \cdot u)^2) = E(u^t (X-m)(X-m)^t u) = u^t \mathrm{Cov}(X) u = u^t D u.$$

On a donc, d'après la première partie de cette démonstration (c'est-à-dire le cas $d = 1$),

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X\cdot u}(1) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{u^t D u}{2}},$$

ce qui est bien la formule annoncée (car $u^t D u = Du \cdot u$). ■

On montre enfin le théorème central limite, qui nous dit que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend en loi vers une variable aléatoire gaussienne.

Théorème 10.24 (Théorème central limite) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. de dimension* d *i.i.d.. On suppose que* $E(|X_1|^2) < \infty$. *On pose* $E(X_1) = m$, $D = Cov(X_1)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m).$$

La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge alors en loi vers tout v.a.* Y *dont la loi est la loi normale multidimensionnelle* $\mathcal{N}(0, D)$. *(Voir la définition 9.5 et la proposition 9.33 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)*

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 10.22 et la proposition 10.23, il suffit de montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{Y_n}(u) = e^{-\frac{u^t Du}{2}},$$

où φ_{Y_n} est la fonction caractéristique du v.a. Y_n.

Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\varphi_{Y_n}(u) = E(e^{iY_n\cdot u}) = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}\sum_{p=1}^n (X_p - m)\cdot u}) = E(\prod_{p=1}^n e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_p-m)\cdot u}).$$

Les v.a. X_p $(p = 1,\ldots,n)$ étant indépendants et identiquement distribués, on a donc, par la proposition 9.27 (cette proposition est écrite pour des fonctions à valeurs réelles mais elle s'étend à des fonctions à valeurs complexes en décomposant les fonctions en parties réelles et imaginaires),

$$\varphi_{Y_n}(u) = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u})^n. \tag{10.8}$$

On pose $z_n = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u})$ et on calcule maintenant z_n en faisant un développement limité des fonctions cos et sin. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ t.q. $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0$, $i = 1,2$ et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \sin(x) = x + x^2\varepsilon_2(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP &= 1 - \frac{1}{2n}\int_\Omega ((X_1-m)\cdot u)^2 dP\\ &+\frac{1}{n}\int_\Omega ((X_1-m)\cdot u)^2\varepsilon_1(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP &= \frac{1}{2n}\int_\Omega (X_1-m)\cdot u dP\\ &+\frac{1}{n}\int_\Omega ((X_1-m)\cdot u)^2\varepsilon_2(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP.\end{aligned}$$

Comme $E(|X_1|^2) < +\infty$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega ((X_1-m)\cdot u)^2\varepsilon_i(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = 0 \text{ pour } i = 1,2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((X_1-m)\cdot u)^2 dP &= \int_\Omega u^t(X_1-m)(X_1-m)^t u dP\\ &= u^t\Big(\int_\Omega (X_1-m)(X_1-m)^t dP\Big)u = u^t Du.\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega (X_1-m)\cdot u dP = \Big(\int_\Omega (X_1-m)dP\Big)\cdot u = 0.$$

En posant $a = \dfrac{u^t Du}{2}$, on a donc

$$\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = 1 - \frac{b_n}{n},\ \int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1-m)\cdot u)dP = \frac{c_n}{n},$$

avec $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. En posant $a_n = b_n + ic_n$, on a donc $z_n = (1 - \frac{a_n}{n})$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Avec (10.8), ceci donne

$$\varphi_{Y_n}(u) = z_n^n = (1 - \frac{a_n}{n})^n.$$

Comme $a \in \mathbb{R}$, le lemme 10.25 donne le résultat, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(u) = e^{-a} = e^{-\frac{u^t Du}{2}}$. ■

Lemme 10.25
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes t.q. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. *On a alors*

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a_n}{n})^n = e^{-a}.$$

DÉMONSTRATION – Ce lemme est bien connu si $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que $a_n < n$ pour n assez grand et que $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{a_n}{n}) = -\lim_{n\to+\infty} a_n = -a$. La difficulté est ici que a_n peut ne pas être un nombre réel.

On pose $z_n = 1-\frac{a_n}{n}$ et $y_n = 1-\frac{a}{n}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car elle est convergente), il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ t.q. $|a_n| \le \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $|z_n| \le 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$ (et aussi $|y_n| \le 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$). On a alors (en écrivant $\varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$ avec $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par $\varphi(t) = (tz_n+(1-t)y_n)^n$)

$$z_n^n - y_n^n = n(z_n-y_n)\int_0^1 (tz_n+(1-t)y^n)^{n-1}dt.$$

Comme $|tz_n+(1-t)y_n| \le t|z_n|+(1-t)|y_n| \le 1+\dfrac{\mathrm{M}}{n} \le e^{\frac{\mathrm{M}}{n}}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on en déduit que

$$|z_n^n - y_n^n| \le n|z_n-y_n|e^{\mathrm{M}} = |a-a_n|e^{\mathrm{M}}.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} z_n^n = \lim_{n\to+\infty} y_n^n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a}{n})^n = e^{-a}$. ■

10.7 Exercices

10.7.1 Transformation de Fourier

Exercice 10.1 (Résultat partiel d'inversion de Fourier dans $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$) Soit $\mathrm{H}(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose, pour $\lambda > 0$:

$$h_\lambda(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)e^{itx}dt, x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $h_\lambda(x) = (\dfrac{2}{\pi})^{\frac{1}{2}}\dfrac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$, et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x)dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.
2. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(\lambda t)\widehat{f}(t)e^{ixt}dt.$$

3. Soit g une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, continue en 0. Montrer que $g * h_\lambda(0) \to \sqrt{2\pi}g(0)$ quand $\lambda \to 0$. [Utiliser 1. et le théorème de convergence dominée.]
4. Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathrm{T},\lambda)$, montrer que :

$$\|f * h_\lambda - \sqrt{2\pi}f\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

   [On pourra utiliser la continuité en moyenne et la question précédente avec $g(y) = \int |f(x+y)-f(x)|dx$.]
5. Déduire de ce qui précède le théorème d'inversion de Fourier, théorème 10.6.

Exercice 10.2 (La transformation de Fourier n'est ni stable ni surjective) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}$ l'espace $\mathrm{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. On pose $f = 1_{[-a,a]}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f. En déduire que $L^1_{\mathbb{C}}$ n'est pas stable par transformation de Fourier.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n = 1_{[-n,n]}$. Calculer $f * g_n$, et montrer qu'il existe $h_n \in L^1_{\mathbb{C}}$ t.q. $\widehat{h_n} = f * g_n$. Montrer que la suite $f * g_n$ est bornée dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors que la suite h_n n'est pas bornée dans $L^1_{\mathbb{C}}$. En déduire que la transformée de Fourier n'est pas surjective de $L^1_{\mathbb{C}}$ dans $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exercice 10.3 (Une condition donnant $\widehat{f} \in L^1$)
On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, T, \lambda)$.

1. Soient $f, g \in L^1$, montrer que $f\widehat{g} \in L^1$, $g\widehat{f} \in L^1$ et $\int f\widehat{g} d\lambda = \int g\widehat{f} d\lambda$.

2. Soit $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Montrer que $1_B * 1_B(t) = (1 - |t|)^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. On pose $\theta_n(t) = (1 - \frac{|t|}{n})^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Calculer $\widehat{\theta_1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
   [On pourra remarquer que $\theta_1 = 1_B * 1_B$ avec $B = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.]

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}^\star$, montrer que

$$\widehat{\theta}_n(y) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{ny^2}.$$

4. Soit $f \in L^1 \cap L^\infty$ t.q. $\widehat{f}(t) \in \mathbb{R}_+$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On se propose de montrer que $\widehat{f} \in L^1$ (et donc que le théorème d'inversion s'applique). On utilise la fonction θ_n de la question précédente.

   (a) On note $\varphi_n = \theta_n \widehat{f}$; montrer que $\varphi_n \uparrow \widehat{f}$ et $\int \varphi_n d\lambda \uparrow \int \widehat{f} d\lambda$ lorsque $n \to +\infty$.

   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \geq 0$ indépendant de n tel que $\int \widehat{\theta}_n(y) dy = \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\widehat{f} \in L^1$.

Exercice 10.4 (Transformée de Fourier inverse) Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$, est aussi intégrable (pour la mesure de Lebesgue).

1. En utilisant le fait que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$, montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\widehat{f}(-t)) &= \mathrm{Re}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{Im}(\widehat{f}(-t)) &= -\mathrm{Im}(\widehat{f}(t)) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

   où $\mathrm{Re}(\xi)$ et $\mathrm{Im}(\xi)$ désignent les parties réelle et imaginaire du nombre complexe ξ.

2. Montrer que

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(\widehat{f}(t) e^{itx}) dt \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10.5 (Transformée de Fourier pour f de classe C^2, à support compact) On note $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Soit $f \in C^2_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (c'est-à-dire que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^2, et qu'il existe K compact de $\mathbb{R}$ t.q. $f = 0$ sur K^c).

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$.

2. Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}$. [On pourra utiliser la proposition 10.7.]

3. Montrer que $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

N.B. Comme $C^2_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, cet exercice permet de définir la transformée de Fourier dans $L^2_{\mathbb{C}}$ sans utiliser l'espace $\mathcal{S}_1$.

Exercice 10.6 (Caractérisation de m par $\widehat{m}$) Soit $d \geq 1$.

1. Soit m et μ deux mesures signées sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} = \widehat{\mu}$.
   (a) Soit $\varphi \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que $\int \widehat{\varphi} dm = \int \widehat{\varphi} d\mu$.
   (b) Montrer que $\int \varphi dm = \int \varphi d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (et donc pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).
   (c) Montrer que $m = \mu$ (On rappelle qu'une fonction de $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est limite uniforme de fonctions de $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$).
2. Soit m une mesure signée sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $\widehat{m} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Montrer que m est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f = \widehat{\widehat{m}}(-\cdot)$.

Exercice 10.7 (Transformée de Fourier du produit de fonctions)
Pour $p \in [1, +\infty]$, On note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on désigne par $\|\cdot\|_p$ la norme dans L^p.
On note $C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Enfin, on note $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Si $f \in L^1$, on désigne par $\widehat{f}$ la transformée de f (on a donc $\widehat{f} \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).
Si $f \in L^2$, on désigne par $\tilde{\mathcal{F}}(f)$ la transformée de Fourier de f (on a donc $\tilde{\mathcal{F}}(f) \in L^2$).
On rappelle que si $f \in L^1 \cap L^2$, on a $\widehat{f} = F(f)$ p.p.. Dans ce cas, on confond, en général, $\widehat{f}$ et $\tilde{\mathcal{F}}(f)$.

1. (Convolution $L^2 - L^2$). Soit $u, v \in L^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction $s \mapsto u(t-s)v(s)$ est intégrable et donc que la fonction $u * v$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ par la formule
$$u * v(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t-s)v(s)ds, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $u * v \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\|u * v\|_\infty \leq \|u\|_2 \|v\|_2$.
2. Soit $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   (a) Montrer que f, g, $fg \in L^1 \cap L^2$, puis que $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1 \cap L^2$.
   (b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}(t).$$
   [On pourra, par exemple, utiliser le fait que $f, \widehat{g} \in L^1$ et calculer $\widehat{f} * \widehat{g}(t)$ en utilisant la définition de $\widehat{f}$ et la transformée de Fourier inverse pour $\widehat{g}$.]
3. Soit $f, g \in L^2$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{fg}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathcal{F}}(f) * \tilde{\mathcal{F}}(g)(t).$$

Exercice 10.8 (Caractérisation des fonctions à valeurs réelles) Soit $d \geq 1$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$.

1. Soit $f \in \mathcal{S}_d$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.
3. Soit $f \in L^2$. Montrer que $f(x) \in \mathbb{R}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 10.9 ($f \in C_c^\infty$ **et** $\widehat{f} = 0$ **sur un ouvert non vide implique** $f = 0$)
Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que $\widehat{f} = 0$ sur U. Montrer que $f = 0$ sur tout $\mathbb{R}$. [On pourra commencer par montrer que l'application $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \mapsto \int f(x)e^{-ix(\xi+i\eta)dx}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{C}$.]

Exercice 10.10 (Théorème d'injection de Sobolev)
Soit $d \geq 1$. Pour $p \in [1, \infty]$, on note L^p l'espace l'espace $L^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$. Si $f \in L^2$, on note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f.
Pour $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, on note $H^s(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2 \text{ t.q. } (1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2\}$ et $\|f\|_{H^s} = \|(1 + |\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}\|_{L^2}$.
On rappelle que $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est un sous espace vectoriel fermé de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$. Avec cette norme, $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ sont des espaces de Banach.
Soit $s > \frac{d}{2}$.

1. Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\widehat{f} \in L^1$. En déduire que $f \in C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ (au sens "il existe $g \in C_0(\mathbb{R}^2)$ telle que $f = g$ p.p." ; on confond alors f et g).
2. Montrer que $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ et qu'il existe C_s, ne dépendant que de s et d, t.q. :

$$\|f\|_u \leq C_s \|f\|_{H^s} \text{ pour tout } f \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

3. On s'intéresse maintenant au cas $d = 2$.
   (a) Soit $s > 1$ et $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_u \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi(s-1)}} \|f\|_{H^s}.$$

   (b) Soit $1 < s < 2$ et $f \in H^2(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\|f\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^1}^{2-s} \|f\|_{H^2}^{s-1}.$$

   [Utiliser l'inégalité de Hölder.]
   (c) On pose $C = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$. Montrer que

$$f \in H^2(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_{H^1} = 1 \Rightarrow \|f\|_u \leq C\sqrt{\ln(1 + \|f\|_{H^2})}.$$

   [Pour $a > 1$, on pourra chercher le minimum pour $s \in]1, 2[$ de la fonction $s \mapsto \frac{a^{s-1}}{\sqrt{s-1}}$, et distinguer selon les valeurs de a.]

   Soit $\beta > 0$, montrer qu'il existe C_β, ne dépendant que de β, t.q. :

$$f \in H^2(\mathbb{R}^2),\ \|f\|_{H^1} \leq \beta \Rightarrow \|f\|_u \leq C_\beta \sqrt{\ln(1 + \|f\|_{H^2})}.$$

10.7.2 Fonction Caractéristique d'une v.a.r.

Exercice 10.11 (Calcul de fonctions caractéristiques) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. réelle. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X dans les cas suivants :

1. $X = a$ p.s. ($a \in \mathbb{R}$).
2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre p : $P(\{X = 1\}) = p = 1 - P(\{X = 0\})$).

3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Exercice 10.12 (Loi normale et vecteur gaussien) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et X un v.a. de dimension d. Soit $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice s.d.p. (de taille $d \times d$). Si $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \mathrm{D})$, où $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ est définie par la définition 9.5, montrer que X est un vecteur gaussien.

Exercice 10.13 (Vecteurs gaussiens et densité) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)$ un v.a. de dimension d.
On suppose que X est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^d a_i \mathrm{X}_i$ suit une loi gaussienne pour tout $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$). On note m la moyenne de X et D la matrice de covariance de X. Montrer que la loi de X est de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}^d$) si et seulement si D est inversible. Si D est inversible, montrer que la loi de X est la loi $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ donnée dans la définition 9.5.

Exercice 10.14 (V.a. gaussiens, indépendance, covariance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, $d \geq 1$ et $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d)$ un v.a. de dimension d.

1. On suppose ici que $d = 2$.
   (a) On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$.
   (b) On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
2. On suppose toujours $d = 2$. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes, voir l'exercice 4.47.]
3. On suppose que X est un vecteur gaussien et que les composantes de X sont indépendantes deux à deux. Montrer que $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d$ sont indépendantes.

Exercice 10.15 (Suite de v.a.r.i.i.d. de Poisson) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $\mathrm{P}(\{\mathrm{X} = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \lambda$, $\mathrm{Var}(\mathrm{X}) = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_{X} de X.
2. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ.
   (a) Soit $n > 1$. Déduire de la question 1 la loi de la v.a. $\mathrm{Y}_n = \sum_{p=1}^n \mathrm{X}_p$.
   (b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer que

$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Exercice 10.16 (Sur les lois des grands nombres) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une v.a.r. dont la loi est la loi de Cauchy c'est-à-dire que $\mathrm{P}_{\mathrm{X}} = f\lambda$, avec $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$).

1. Montrer que X n'est pas une v.a.r. intégrable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $\mathrm{P}(\{|\mathrm{X}| > n\}) \geq \frac{1}{n\pi}$, où $\{|\mathrm{X}| > n\} = \{\omega \in \Omega,\ |\mathrm{X}(\omega)| > n\}$. [On pourra remarquer que $\frac{2}{1+x^2} \geq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$.]
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{-|x|}$. Montrer que

$$\frac{2}{1+u^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} g(x) dx = \sqrt{2\pi}\widehat{g}(u) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

En déduire que la fonction caractéristique de X, notée φ_X vérifie $\varphi_X(u) = e^{-|u|}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. [On pourra utiliser de théorème d'inversion de Fourier qui donne $\widehat{\widehat{g}} = g(-\cdot)$ p.p. si $g, \widehat{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]
On se donne maintenant une suite $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de v.a.r.i.i.d. et on suppose que la loi de X_1 (et donc de tous les X_n) est la loi de Cauchy. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \frac{1}{n}\Big(\sum_{p=1}^{n} X_p\Big).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que
   $$\varphi_{Z_n}(u) = \varphi^n_{X_1}\Big(\frac{u}{n}\Big) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$
   (b) Donner la loi de Z_n.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{|X_n| > n\}$ et $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p$. On pose aussi $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question 2, montrer que
   $$P(B_n^c) = \prod_{p \geq n} P(A_p^c) \leq \prod_{p \geq n}\Big(1 - \frac{1}{p\pi}\Big).$$
   En déduire que $P(B_n^c) = 0$ et donc que $P(B_n) = 1$.
   (b) Montrer que $P(B) = 1$. [Cette question est une conséquence de la question (a) mais elle peut aussi être faite directement en appliquant le lemme de Borel-Cantelli et la question 2.]
   (c) Soit $\omega \in B$. Montrer que $\frac{X_n(\omega)}{n} \not\to 0$ quand $n \to +\infty$.
   (d) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que si la suite $(Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie on a alors
   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0.$$
   [Écrire X_n en fonction de Z_n et Z_{n-1}.]
   (e) Déduire des trois questions précédentes que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas p.s. vers une limite finie quand $n \to +\infty$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
   $$Z_{2n} - Z_n = \frac{U_n + V_n}{2},$$
   où U_n et V_n sont deux v.a.r. indépendantes, de loi de Cauchy. En déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité.
7. Pour quelles raisons ne peut-on appliquer, à la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, les lois forte et faible des grands nombres ?

Exercice 10.17 (Sur la loi d'un vecteur aléatoire) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X un v.a. de dimension d. Montrer que la loi de X est uniquement déterminée par la donnée des lois de toutes les v.a.r. $a \cdot X$, $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| = 1$. [On pourra utiliser la fonction caractéristique de X.]

Exercice 10.18 (Limite en loi de Gaussiennes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes. On suppose que X_n tend en loi vers X, quand $n \to +\infty$. On note m_n l'espérance de X_n et

σ_n^2 la variance de X_n (avec $\sigma_n \geq 0$). Si $\sigma_n > 0$, la v.a.r. X_n a donc pour loi une loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x-m_m)^2}{2\sigma_n^2}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\sigma_n = 0$, la loi de X_n est δ_{m_n}.

Si Z est une v.a.r., on note φ_Z la fonction caractéristique de Z (on rappelle que φ_Z est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et que $\varphi_Z(0) = 1$). On rappelle que la fonction caractéristique de X_n est

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} e^{im_n t} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

1. Soit Z une v.a.r.. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}^*$ t.q. $|\varphi_Z(t)| > 0$.
2. Montrer que la suite $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser la convergence de $|\varphi_{X_n}(t)|$ vers $|\varphi_X(t)|$ pour t bien choisi.]
3. Calculer $P(\{X_n \geq m_n\})$ et $P(\{X_n \leq m_n\})$ et en déduire que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. [On pourra utiliser le fait que la suite $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, d'après la proposition 9.20.]
4. Montrer que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. En déduire que X est une v.a.r. gaussienne.

Exercice 10.19 (Caractérisation de $X = 0$ **p.s.)** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé. Si Z est une v.a.r., on note φ_z la fonction caractéristique de Z, c'est-à-dire $\varphi_Z(t) = E(e^{iZt})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$. On suppose que $\varphi_X(t) = 1$ pour tout $t \in [-a, a]$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in [-a, a]$, $\displaystyle\int_\Omega [1 - \cos(tX(\omega))]dp(\omega) = 0$.
   (b) Montrer que $X = 0$ p.s..
2. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.
   (a) Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.
   (b) On suppose maintenant que $X + Y$ et Y ont même loi. Montrer que $X = 0$ p.s..

Exercice 10.20 (Indépendance et variables gaussiennes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r.i.i.d. t.q. $E(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 1$.

On rappelle une caractérisation de l'indépendance avec les fonctions caractéristiques, donnée dans la proposition 10.21 : Soit Z_1, Z_2 deux v.a.r., on note Z le v.a. (de dimension 2) dont les composantes sont Z_1 et Z_2. Les v.a.r. Z_1 et Z_2 sont indépendantes si et seulement si les fonctions caractéristiques de Z, Z_1 et Z_2 (notées φ_Z, φ_{Z_1} et φ_{Z_2}) vérifient $\varphi_Z(u_1, u_2) = \varphi_{Z_1}(u_1)\varphi_{Z_2}(u_2)$ pour tout $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que X et Y sont des v.a.r. gaussiennes. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont des v.a.r. indépendantes. [On pourra utiliser le rappel.]

   On suppose maintenant, pour toute la suite de l'exercice, que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. Le but des questions suivantes est de démontrer que X et Y sont des variables gaussiennes. On note toujours φ_X la fonction caractéristique de X.
2. Montrer que $\lim_{t\to 0} \frac{1-\varphi_X(t)}{t^2} = \frac{1}{2}$. [Utiliser $E(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$ et un développement limité des fonctions cos et sin.]
3. Montrer que $\varphi_X(2t) = \varphi_X(t)^3\varphi_X(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ [Utiliser l'indépendance de $X + Y$ et $X - Y$]. Montrer que $\varphi_X(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Soit $\rho(t) = \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(-t)}$. Montrer que $\rho(t) = \rho(t/2^k)^{2^k}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\rho(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ [utiliser la question 2]. Montrer que φ_X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $\varphi_X(t+s)\varphi_X(t-s) = \varphi_X(t)^2\varphi_X(s)^2$ pour tout $t, s \in \mathbb{R}$. En déduire que $\varphi_X(nt) = \varphi_X(t)^{n^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que X (et donc aussi Y) est une v.a.r. gaussienne.