Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, Probabilités-Statistique
Devoir pour jeudi 9 février

Exercice 1 (Indépendance et Indépendance 2 à 2) On montre ici qu'il est possible d'avoir 3 v.a.r. X_1, X_2, X_3 indépendantes deux à deux et telles que $(X_1 + X_2)$ et X_3 ne sont pas indépendantes.
L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est formé d'un ensemble Ω qui a 4 éléments, $\Omega = \{a, b, c, d\}$. La tribu $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de Ω et p est la probabilité sur $\mathcal{A}$ définie par $p(\{a\}) = p(\{b\}) = p(\{c\}) = p(\{d\}) = 1/4$. Les 3 v.a.r considérées sont définies par $X_i = 1_{A_i}$ avec $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, c\}$ et $A_3 = \{b, c\}$.

1. Montrer que X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux.

Corrigé – *On rappelle que l'indépendance de X_i et X_j est équivalente à l'indépendance de A_i et A_j.*
Comme $A_1 \cap A_2 = \{a\}$, $A_1 \cap A_3 = \{b\}$ et $A_2 \cap A_3 = \{c\}$, on a pour tout i, j, $i \neq j$, $p(A_i \cap A_j) = 1/4$.
Comme $p(A_i) = 1/2$, on a bien $p(A_i \cap A_j) = p(A_i)p(A_j)$ pour tout i, j, $i \neq j$. Ceci prouve que X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux.

2. Montrer que $(X_1 + X_2)$ et X_3 ne sont pas indépendantes.

Corrigé –
On compare, par exemple, $p(\{X_1 + X_2 = 2\} \cap \{X_3 = 1\})$ et $p(\{X_1 + X_2 = 2\})p(\{X_3 = 1\})$.
On a $\{X_1 + X_2 = 2\} = \{a\}$ et $\{X_3 = 1\} = A_3 = \{b, c\}$ et donc $\{X_1 + X_2 = 2\} \cap \{X_3 = 1\} = \emptyset$.
Ceci donne

$$p(\{X_1 + X_2 = 2\} \cap \{X_3 = 1\}) = 0 \neq \frac{1}{2} = p(\{X_3 = 1\}).$$

Ceci prouve que $X_1 + X_2$ et X_3 ne sont pas indépendantes.

3. En déduire que X_1, X_2, X_3 ne sont pas indépendantes.

Corrigé – *Si X_1, X_2, X_3 sont indépendantes, les v.a.r. $(X_1 + X_2)$ et X_3 sont indépendantes. La question précédente montre donc que les v.a.r. X_1, X_2, X_3 ne sont pas indépendantes.*

Exercice 2 (Médianes)
Soit μ une mesure de probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On appelle *médiane* de μ tout réel m tel que

$$\mu([m, +\infty[) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mu(]-\infty, m]) \geq \frac{1}{2}\,.$$

On note F la fonction de répartition de μ.

1. Déterminer toutes les médianes de μ pour les cas suivants :

(a) La loi de Bernoulli $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$,

Corrigé –
$\mu([m, +\infty[) \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si $m \leq 1$ et $\mu(]-\infty, m]) \geq \frac{1}{2}$ si et seulement si $m \geq 0$. L'ensemble des médianes de μ est donc $[0, 1]$.

(b) la loi de Bernoulli $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1$,

Corrigé –
$\mu([m, +\infty[) \geq \frac{1}{2}$ *si et seulement si* $m \leq 1$ *et* $\mu(]-\infty, m]) \geq \frac{1}{2}$ *si et seulement si* $m \geq 1$. *L'ensemble des médianes de* μ *est donc* $\{1\}$.

(c) la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Corrigé – On rappelle que $\mu(A) = \lambda(A \cap [0, 1])$ *pour tout* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
$\mu([m, +\infty[) \geq \frac{1}{2}$ *si et seulement si* $m \leq \frac{1}{2}$ *et* $\mu(]-\infty, m]) \geq \frac{1}{2}$ *si et seulement si* $m \geq \frac{1}{2}$. *L'ensemble des médianes de* μ *est donc* $\{\frac{1}{2}\}$.

2. On note $t^\star = \inf\{t\,;\, F(t) \geq \frac{1}{2}\}$. On souhaite démontrer que $t^\star$ est une médiane de μ.

(a) Montrer que $F(t^\star) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $\mu(]-\infty, t^\star]) \geq \frac{1}{2}$.

Corrigé –
Comme F *est croissante,* $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$, *l'ensemble* $\{t\,;\, F(t) \geq \frac{1}{2}\}$ *est un intervalle dont la borne inférieure est* $t^\star$ *(qui appartient à* $\mathbb{R}$*) et la borne supérieure est* $+\infty$. *Le fait que* F *est continue à droite donne que* $t^\star$ *appartient à cet intervalle, c'est-à-dire que* $\{t\,;\, F(t) \geq \frac{1}{2}\} = [t^\star, +\infty[$. *On a donc* $F(t^\star) \geq \frac{1}{2}$ *(et donc* $\mu(]-\infty, t^\star] = F(t^\star) = \frac{1}{2}$*).*

(b) Montrer que pour tout $t < t^\star$, on a $\mu([t, +\infty[) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $t^\star$ est une médiane pour μ.

Corrigé – Si $t < t^\star$, *on a* $t \notin \{s\,;\, F(s) \geq \frac{1}{2}\}$ *et donc* $F(t) = \mu(]-\infty, t] < \frac{1}{2}$. *Ceci donne* $\mu(]t, +\infty[) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(]-\infty, t] = 1 - \mu(]-\infty, t] > \frac{1}{2}$. *En remarquant que* $[t^\star, +\infty[= \cap_{n\in\mathbb{N}}]t^\star - \frac{1}{n}, +\infty[$, *la continuité décroissante de* μ *donne* $\mu([t^\star, +\infty[) \geq 1/2$. *Avec la question précédente, on en déduit que* $t^\star$ *est une médiane pour* μ.

Exercice 3 (Probabilité conditionnelle, loi conditionnelle)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit A un événement de probabilité non nulle. On définit la *probabilité conditionnelle sachant* A par la formule

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ pour tout } B \in \mathcal{A}.$$

1. Vérifier que $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un nouvel espace probabilisé. Montrer que $P_A(A) = 1$.

Corrigé –
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$, *disjoints deux à deux. Comme la suite* $(B_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ *est aussi une suite d'éléments de* $\mathcal{A}$, *disjoints deux à deux, on a, avec la* σ*-additivité de* P,

$$P_A(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \frac{P((\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\cup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A))}{P(A)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(B_n \cap A)}{P(A)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_A(B_n),$$

ce qui prouve σ*-additivité de* P_A. *Comme* $P_A(\Omega) = 1$, *on en déduit bien que* P_A *est une probabilité. On remarque aussi que* $P_A = \frac{P(A\cap A)}{P(A)} = 1$.

Soit X une variable aléatoire réelle. La *loi conditionnelle de X sachant A* est la loi $(P_A)_X$ c'est-à-dire l'image de la mesure P_A par X.

2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $A = \{X \leq \frac{1}{2}\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.

Corrigé – Comme la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$, on rappelle que, en notant λ la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P_X(B) = \lambda(B \cap [0,1])$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. En particulier, on a

$$P(A) = P(\{X \leq \frac{1}{2}\}) = P_X(]-\infty, \frac{1}{2}]) = \lambda(-]\infty, \frac{1}{2}] \cap [0,1]) = \frac{1}{2}.$$

On calcule maintenant $(P_A)_X$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}(P_A)_X(B) = P_A(\{X \in B\}) = 2P(\{X \in B\} \cap \{X \leq \frac{1}{2}\}) \\ = 2P(\{X \in B \cap]-\infty, \frac{1}{2}]\}) = 2\lambda(B \cap [0, \frac{1}{2}]).\end{aligned}$$

Ceci prouve que $(P_A)_X$ est la loi uniforme sur $[0, \frac{1}{2}]$.