**Université de Marseille**
**Licence de Mathématiques, 3eme année, Probabilités-Statistique**
**Devoir pour jeudi 15 février**

**Exercice 1 (Somme de deux v.a.r.)** Soitent $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilisé, $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que

$$P(\{X = k\}) = P(\{Y = k\}) = pq^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que $X$ et $Y$ ont même loi.

   *Corrigé – Comme $\sum_{k\in\mathbb{N}} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$, les v.a.r. $X$ et $Y$ prennent leurs valeurs presque sûrement dans $\mathbb{N}$. Comme $P(\{X = k\}) = P(\{Y = k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que les v.a.r. $X$ et $Y$ ont même loi,*
   $$P_X = P_Y = \sum_{k\in\mathbb{N}} pq^k \delta_k.$$

2. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Calculer $P(\{X = k\} \cap \{Y = l\})$.

   *Corrigé – En utilisant l'indépendance de $X$ et $Y$, on a*
   $$P(\{X = k\} \cap \{Y = l\}) = P(\{X = k\})P(\{Y = l\}) = p^2 q^{k+l}.$$

3. Déterminer la loi de $X + Y$.

   *Corrigé – La v.a.r. $X + Y$ ne prend aussi p.s. ses valeurs dans $N$ et on a, en utilisant la $\sigma$-addivité de $P$ et l'indépendance de $X$, $Y$,*
   $$P(\{X + Y = k\}) = \sum_{l=0}^{k} P(\{X = l\} \cap \{Y = k - l\})$$
   $$= \sum_{l=0}^{k} P(\{X = l\}P(\{Y = k - l\} = (k + 1)p^2 q^k.$$

4. Montrer que pour $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \le n$, on a $P(\{X = k\} \mid \{X + Y = n\}) = \dfrac{1}{n+1}$.

   *Corrigé – Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $P(\{X + Y = n\}) > 0$ la probabilité conditionnelle sachant $\{X + Y = n\}$ est donc bien définie et on a, en utilisant encore l'indépendance de $X$, $Y$,*
   $$P(\{X = k\} \mid \{X + Y = n\}) = \frac{P(\{X = k\} \cap \{X + Y = n\})}{P(\{X + Y = n\})}$$
   $$= \frac{P(\{X = k\} \cap \{Y = n - k\})}{P(\{X + Y = n\})} = \frac{P(\{X = k\})P(\{Y = n - k\})}{P(\{X + Y = n\})} = \frac{1}{n+1}.$$

   On rappelle que $P(B \mid A)$ désigne la probabilité conditionnelle de $B$ sachant $A$ (voir le td2).

**Exercice 2 (Temps d'arrêt)** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$. Soit $T$ le premier "instant" où la valeur 1 est prise, c'est-à-dire que $T$ est définie par, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\} \text{ si } \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\} \ne \emptyset,$$
$$T(\omega) = 0 \text{ si } \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\} = \emptyset.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{T = n\} \in \mathcal{F}$. En déduire que $T$ est une v.a.r..

   *Corrigé –* *On a* $\{T = 0\} = \cap_{k\in\mathbb{N}^\star}\{X_k = 0\}$, $\{T = 1\} = \{X_1 = 1\}$ *et pour* $n > 1$,
   $$\{T = n\} = \{X_n = 1\} \cap (\cap_{k=1}^{n-1}\{X_k = 0\}).$$
   *La stabilité de* $\mathcal{F}$ *par union dénombrable nous permet alors de conclure de* $\{T = n\} \in \mathcal{F}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
   *La stabilité de* $\mathcal{F}$ *par union dénombrable nous permet alors aussi de conclure de* $T$ *est v.a.r. car elle donne* $\{T \in B\} = \cap_{n\in B}\{T = n\} \in \mathcal{F}$ *pour* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *(et même pour tout* $B \subset \mathbb{R}$*).*

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $r_n = P(\{X_n = 1\})$ et on suppose que $r_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

2. Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, l'expression de $P(\{T = k\})$ à l'aide des $r_n$ et de $k$.

   *Corrigé –* *L'expression de* $\{T = k\}$ *vue à la question précédente et l'indépendance des* $X_n$ *donne*
   $$P(\{T = 0\}) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - r_n),\ P(\{T = 1\}) = r_1$$
   $$\textit{et } P(\{T = k\}) = r_k \prod_{n=1}^{k-1}(1 - r_n),\ \textit{si } k > 1.$$

3. Montrer que $T > 0$ p.s. si et seulement si $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1 - r_n) = 0$. Donner un choix possible des valeurs de $r_n$ pour lequel $P(\{T = 0\} > 0)$.

   *Corrigé –* $T > 0$ *p.s. si et seulement si* $P(\{T = 0\}) = 0$ *et donc si et seulement si* $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1 - r_n) = 0$ *(d'après la question précédente).*
   *En prenant* $r_n = \frac{1}{n^2}$ *pour* $n > 1$, *on a* $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1 - r_n) > 0$ *et donc* $P(\{T = 0\} > 0)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $r_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $r$ fixé dans $]0, 1[$.

4. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, en fonction de $r$ et $k$, $P(\{T = k\})$. Donner l'espérance et la variance de $T$.

   *Corrigé –* *Puisque* $r_n = r \in ]0, 1[$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on a*
   $$P(\{T = 0\}) = 0 \textit{ et } P(\{T = k\}) = r(1 - r)^{k-1} \textit{ si } k \geq 1.$$
   $E(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(\{T = k\}) = r\sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - r)^{k-1}$ *et* $E(T^2) = r\sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1 - r)^{k-1}$.
   *La série* $\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - r)^k$ *est uniformément convergente sur* $]a, 1[$ *(pour tout* $a > 0$*) ainsi que les séries obtenues par dérivation terme à terme. On peut donc obtenir (pour* $r \in ]0, 1[$*) les dérivées de la somme en dérivant terme à terme, c'est-à-dire*
   $$\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - r)^k = \frac{1}{r}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - r)^{k-1} = \frac{1}{r^2},$$
   $$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k - 1)(1 - r)^{k-2} = \frac{2}{r^3}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2(1 - r)^{k-1} = \frac{2}{r^3} - \frac{1}{r^2} = \frac{2 - r}{r^3}.$$
   *On obtient donc* $E(T) = \frac{1}{r}$ *et Var*$(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{2-r}{r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1-r}{r^2}$.

5. On pose $T_0 = 0$, $T_1 = T$ et, pour tout $n \geq 1$ et $\omega \in \Omega$,

$T_{n+1}(\omega) = \inf\{m > T_n(\omega)$ tel que $X_m(\omega) = 1\}$ si $\{m > T_n(\omega)$ tel que $X_m(\omega) = 1\} \neq \emptyset$,
$T_{n+1}(\omega) = 0$ si $\{m > T_n(\omega)$ tel que $X_m(\omega) = 1\} = \emptyset$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n > 0$ p.s..

*Corrigé –* *La fonction $T_n$ est bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$ une v.a.r.. Ceci se démontre de manière analogue au cas $n = 1$ (première question de l'exercice).*
*Soit $n \geq 1$. Soit $\omega \in \Omega$. Si $T_n(\omega) = 0$, on a alors $\omega \in \cap_{m > T_n(\omega)}\{X_m = 0\}$. Ceci montre que*

$$\{T_n = 0\} \subset \cup_{k \in \mathbb{N}}(\cap_{m>k}\{X_m = 0\}).$$

*On a donc, par $\sigma$-additivité de $P$ et indépendance des $X_n$,*

$$P\{T_n = 0\} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(\cap_{m>k}\{X_m = 0\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{m>k} P(\{X_m = 0\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \prod_{m>k} (1-r) = 0.$$

(b) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et , $P(\{T_n = k\})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'espérance et la variance de $T_n$.

*Corrigé –* *Soient $n > 1$ $k \geq n$. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) > 0$ (on rappelle que $P(\{T = 0\}) = 0$) Pour que $T_n(\omega) = k$, il faut et il suffit que $X_k(\omega) = 1$ et que parmi les $(k-1)$ $X_i(\omega)$ precedents, il y en ait exactement $(n-1)$ pour lesquels $X_i(\omega) = 1$. Le nombre de choix possibles de $(n-1)$ éléments parmi $(k-1)$ elements est le nombre noté $C_{n-1}^{k-1}$. On rappelle que*

$$C_{n-1}^{k-1} = \binom{k-1}{n-1} = \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!}.$$

*Pour chacun de ces choix, la probabilité est (grâce à l'independance des $X_i$) $(1-r)^{k-n}r^n$. Compte tenu de l'additivité de $P$, on obtient finalement*

$$P(\{T_n = k\}) = (1-r)^{k-n}r^n \frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{(1-r)^{k-n}r^n}{(n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (k-i).$$

*On reprend maintenant la méthode de la question 4. Pour tout $k \geq n > 1$ on a, par récurrence sur $n$,*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n-1} (k-i)(1-r)^{k-n} = \frac{n!}{r^{n+1}}.$$

*On en déduit que*

$$E(T_n) = \sum_{k=n}^{+\infty} kP(\{T_n = k\}) = \frac{r^n}{(n-1)!} \sum_{k=n}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n-1} (k-i)(1-r)^{k-n} = \frac{n}{r}.$$

*Puis, on rermarque que*

$$E(T_n^2) = \sum_{k=n}^{+\infty} k^2 P(\{T_n = k\}) = \frac{n}{r} E(T_{n+1}) - E(T_n) = \frac{n^2 + n(1-r)}{r}^2,$$

*et donc Var$(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \frac{n(1-r)}{r^2}$.*

**Exercice 3** Soient $(E, T, P)$ un espace probabilisé et $X_1, X_2$ deux v.a.r.. On note $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$ les tribus engendrées par $X_1$ et $X_2$.

Soit $X$ l'application de $E$ dans $R^2$ définie par $X(\omega) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{bmatrix}$ pour tout $\omega \in E$.

On pose $\sigma = \{X^{-1}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que $\sigma$ est la plus petite tribu contenant $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$. [Reprendre une démonstration vue en cours.]

*Corrigé –* *On note $\Sigma$ la plus petite tribu contenant $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$. On montre ci-après que $\sigma \subset \Sigma$ (c'est la démonstration vue en cours) puis que $\Sigma \subset \sigma$ (ce qui donnera bien $\Sigma = \sigma$).*

**Etape 1.** *On montre dans cette étape que $\sigma \subset \Sigma$.*

*On pose $T = \{A \subset \mathbb{R}^2$, t.q. $X^{-1}(A) \in \Sigma\}$. On remarque tout d'abord que $T$ est une tibu sur $\mathbb{R}^2$. En effet,*

- *$\mathbb{R}^2 \in T$ car $X^{-1}(\mathbb{R}^2) = E \in \Sigma$,*
- *l'ensemble $T$ est stable par union dénombrable car $\Sigma$ est stable par union dénombrable (et donc $X^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) \in \Sigma$ si $X^{-1}(A_n) \in \Sigma$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ si $A_n \in T$ pour tout $n$),*
- *l'ensemble $T$ est stable par passage au complémentaire car $\Sigma$ est stable par passage au complémentaire (et donc $X^{-1}(A^c) = X^{-1}(A)^c \in \Sigma$ si $X^{-1}(A) \in \Sigma$, ce qui donne $A^c \in T$ si $A \in T$).*

*On remarque ensuite que $B_1 \times B_2 \in T$ pour tout couple $(B_1, B_2)$ d'élements de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En effet, $X^{-1}(B_1 \times B_2) = X_1^{-1}(B_1) \cap X_2^{-1}(B_2) \in \sigma$ car $\Sigma$ est stable par intersection finie et $X_i^{-1}(B_i) \in \sigma(X_i) \subset \Sigma$ pour $i = 1, 2$.*

*L'ensemble $T$ est donc une tribu contenant $\{B_1 \times B_2,\, B_1,\, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est la plus petite tribu contenant $\{B_1 \times B_2,\, B_1,\, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$, on a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset T$. Ceci donne $X^{-1}(A) \in \Sigma$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, et donc $\sigma \subset \Sigma$.*

**Etape 2.** *On montre dans cette étape que $\Sigma \subset \sigma$.*

*Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On remarque que $X_1^{-1}(B) = \{X_1 \in B\} = \{X \in B \times \mathbb{R}\} = X^{-1}(B \times \mathbb{R})$. Comme $B \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on a $X^{-1}(B \times \mathbb{R}) \in \sigma$. Ceci montre que $\sigma(X_1) \subset \sigma$. De manière similaire on montre que $\sigma(X_2) \subset \sigma$.*

*La tribu $\sigma$ contient donc $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$, elle contient donc la plus petite tribu contenant $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$, c'est-à-dire $\Sigma$.*