Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, Probabilités-Statistique
Devoir pour jeudi 15 février

Exercice 1 (Somme de deux v.a.r.) Soitent $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilisé, $0 < p < 1$ et $q = 1 - p$. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que

$$P(\{X = k\}) = P(\{Y = k\}) = pq^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que X et Y ont même loi.
2. Soient $k, l \in \mathbb{N}$. Calculer $P(\{X = k\} \cap \{Y = l\})$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.
4. Montrer que pour $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, on a $P(\{X = k\} \mid \{X + Y = n\}) = \dfrac{1}{n+1}$.
   On rappelle que $P(B \mid A)$ désigne la probabilité conditionnelle de B sachant A (voir le td2).

Exercice 2 (Temps d'arrêt) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, 1\}$. Soit T le premier "instant" où la valeur 1 est prise, c'est-à-dire que T est définie par, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\} \text{ si } \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\} \neq \emptyset,$$
$$T(\omega) = 0 \text{ si } \{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\} = \emptyset.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{T = n\} \in \mathcal{F}$. En déduire que T est une v.a.r..

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $r_n = P(\{X_n = 1\})$ et on suppose que $r_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

2. Donner, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, l'expression de $P(\{T = k\})$ à l'aide des r_n et de k.
3. Montrer que $T > 0$ p.s. si et seulement si $\prod_{n \in \mathbb{N}^*}(1 - r_n) = 0$. Donner un choix possible des valeurs de r_n pour lequel $P(\{T = 0\} > 0)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $r_n = r$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec r fixé dans $]0, 1[$.

4. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, en fonction de r et k, $P(\{T = k\})$. Donner l'espérance et la variance de T.
5. On pose $T_0 = 0$, $T_1 = T$ et, pour tout $n \geq 1$ et $\omega \in \Omega$,

   $$T_{n+1}(\omega) = \inf\{m > T_n(\omega) \text{ tel que } X_m(\omega) = 1\} \text{ si } \{m > T_n(\omega) \text{ tel que } X_m(\omega) = 1\} \neq \emptyset,$$
   $$T_{n+1}(\omega) = 0 \text{ si } \{m > T_n(\omega) \text{ tel que } X_m(\omega) = 1\} = \emptyset.$$

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n > 0$ p.s..
   (b) Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq n$, $P(\{T_n = k\})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 3 Soient (E, T, P) un espace probabilisé et X_1, X_2 deux v.a.r.. On note $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$ les tribus engendrées par X_1 et X_2.

Soit X l'application de E dans R^2 définie par $X(\omega) = \begin{bmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \end{bmatrix}$ pour tout $\omega \in E$.

On pose $\sigma = \{X^{-1}(B),\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Montrer que σ est la plus petite tribu contenant $\sigma(X_1)$ et $\sigma(X_2)$. [Reprendre une démonstration vue en cours.]