Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, Probabilités-Statistique
Devoir pour mercredi 11 février

Exercice 1 (Couplage de lois de probabilités)
Notations :

- Si X est une v.a.r. (sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$), on note P_X la loi de X.
- Si μ est une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note F_μ sa fonction de répartition.
- Soit $\alpha \in]0,1[$. La loi de Bernoulli de paramètre α est la loi de probabilité $\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0$.

Définition : Soient μ et ν deux probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On dit qu'il y a un *couplage monotone* de μ et ν si il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et deux v.a.r. X et Y (sur cet espace) telles que $P_X = \mu$, $P_Y = \nu$ et $X(\omega) \le Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

1. (Condition nécessaire) Soient μ et ν deux probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose qu'il y a un couplage monotone de μ et ν. Montrer que $F_\nu(x) \le F_\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Corrigé – *Il y a un couplage monotone de μ et ν. Il existe donc un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et deux v.a.r. X et Y (sur cet espace) telles que $P_X = \mu$, $P_Y = \nu$ et $X(\omega) \le Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $X(\omega) \le Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, on a
   $$\{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) \le x\} \subset \{\omega \in \Omega;\, X(\omega) \le x\},$$
   et donc, par monotonie de P, $F_\nu(x) = P(\{Y \le x\}) \le P(\{X \le x\}) = F_\mu(x)$.

2. (Un exemple)
   (a) Soient $\alpha, \beta \in]0,1[$.
   Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et deux v.a.r. Y et Z indépendantes de lois de Bernoulli de paramètres α et β. (Il est possible de construire ainsi de telles v.a.r..)
   Quelle est la loi de v.a.r. YZ ?

   Corrigé – *Comme $Y \in \{0,1\}$ p.s. et $Z \in \{0,1\}$ p.s, on a aussi $YZ \in \{0,1\}$ p.s. et $P(\{YZ = 1\}) = P(\{X = 1\} \cap \{Z = 1\})$. Comme Y et Y sont indépendantes, on a donc*
   $$P(\{YZ = 1\}) = P(\{Y = 1\} \cap \{Z = 1\}) = P(\{Y = 1\})P(\{Z = 1\}) = \alpha\beta.$$
   Comme $YZ \in \{0,1\}$ p.s., on a alors $P(\{YZ = 0\}) = 1 - \alpha\beta$.
   La v.a.r. YZ a donc pour loi la loi de Bernoulli de paramètre $\alpha\beta$.

   N.B. : Pour justifier plus en détails ce résultat, on peut remarquer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) = 0$ et $Y(\omega) \in \{0,1\}$, $Z(\omega) \in \{0,1\}$ pour tout $\omega \in A^c$. On a donc, pour $\omega \in A^c$, $YZ(\omega) = 1$ si et seulement si $Y(\omega) = Z(\omega) = 1$.
   On a alors, comme $P(A) = 0$ (et en utilisant l'additivité de P et, finalement, l'indépendance de Y et Z),
   $$\begin{aligned} P(\{YZ = 1\}) &= P(\{YZ = 1\} \cap A^c) = P((\{Y = 1\} \cap \{Z = 1\}) \cap A^c) \\ &= P(\{Y = 1\} \cap \{Z = 1\}) = P(\{Y = 1\})P(\{Z = 1\}) = \alpha\beta. \end{aligned}$$

   (b) Soient $\alpha, \gamma \in]0,1[$, $\gamma < \alpha$, μ la loi de Bernoulli de paramètre γ et ν la loi de Bernoulli de paramètre α. Montrer qu'il existe un couplage monotone de μ et ν.

Corrigé – *On pose $\beta = \gamma/\alpha$. On a $\beta \in]0,1[$. On peut donc choisir Y et Z comme à la question précédente et on pose $X = YZ$. La v.a.r. X a pour loi la loi de Bernoulii de paramètre γ. Comme $Z \in \{0,1\}$ p.s., on a $X \le Y$ p.s.. Quitte à changer X et Y sur un ensemble de probabilité nulle, on peut même supposer $X(\omega) \le Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, ce qui ne change pas le fait que la loi de X est μ et que la loi de Y est ν.*

On a bien montré l'existence d'un couplage monotone de μ et ν.

3. (Condition suffisante) Soient μ et ν deux probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On suppose que $F_\nu(x) \le F_\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et trois v.a.r. X, Y et U telles que $P_X = \mu$, $P_Y = \nu$ et $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. (Il est possible de construire ainsi de telles v.a.r..)
   En utilisant l'exercice 3 du td 2, montrer qu'il y a un couplage monotone de μ et ν.

Corrigé – *On considère la fonction G de l'exercice 3 du td 2, que l'on note ici G_X, c'est-à-dire*

$$G_X(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F_\mu(x) \ge u\},\ \textit{si } u \in]0,1[,$$
$$G_X(u) = 0,\ \textit{si } u \notin]0,1[.$$

On considère aussi la fonction G de l'exercice 3 du td 2, mais associée à Y. On la note G_Y, c'est-à-dire

$$G_Y(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F_\nu(x) \ge u\},\ \textit{si } u \in]0,1[,$$
$$G_Y(u) = 0,\ \textit{si } u \notin]0,1[.$$

On pose alors $\bar{X} = G_X(U)$ et $\bar{Y} = G_Y(U)$. L'exercice 3 du td 2 donne que $P_{\bar{X}} = P_X = \mu$ et $P_{\bar{Y}} = P_Y = \nu$.

Puis, comme $F_\nu \le F_\mu$, on a $\bar{X}(\omega) = G_X(U(\omega)) \le G_Y(U(\omega)) = \bar{Y}(\omega)$ pour tout ω tel que $U(\omega) \in]0,1[$. Comme $U \in]0,1[$ p.s., on a donc $\bar{X} \le \bar{Y}$ p.s.. En fait, on a même $\bar{X}(\omega) \le \bar{Y}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, car si $U(\omega) \notin]0,1[$ on a $\bar{X}(\omega) = \bar{Y}(\omega) = 0$.

On a bien montré l'existence d'un couplage monotone de μ et ν.

Exercice 2 (Loi du χ^2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a.r. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle loi du χ^2 à 1 degré de liberté.)

Corrigé – *Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, de sorte que $P_X = f\lambda$.*

L'espérance de X^2 est donnée par $E(X^2) = \int_\Omega X^2 dP = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

Une intégration par parties donne

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} x x e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

On a donc $E(X^2) = 1$.

La variance de X^2 est donnée par $Var(X^2) = \int_\Omega (X^2 - 1)^2 dP = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x^2-1)^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$.

Ici aussi on utilise une intégration par parties, elle donne

$$\int_{\mathbb{R}} x^4 e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} x^3 x e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 3 \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 3\sqrt{2\pi}.$$

On en déduit que Var$(X^2) = 3 - 2 + 1 = 2$.
On calcule maintenant la densité de de la v.a.r. X^2.
Soit φ *fonction borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *On a, en utilisant le fait que* $f(-x) = f(x)$,

$$E(\varphi(X^2)) = \int_\Omega \varphi(X^2)dP = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)f(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$$

On utilise le changement de variable $x^2 = y$ *pour obtenir*

$$E(\varphi(X^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \varphi(y)e^{\frac{-y}{2}}\frac{1}{\sqrt{y}}dy.$$

La v.a.r. X^2 *a donc pour densité la fonction* g *définie par* $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x}{2}}\frac{1}{\sqrt{x}}$ *pour* $x > 0$ *et* $g(x) = 0$ *pour* $x \leq 0$.

Exercice 3 (Coefficient de corrélation) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. de carré intégrable et telles que $\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y) \neq 0$.
On pose $\rho(X, Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$ (c'est le *coefficient de corrélation* entre X et Y).

1. Montrer que $|\rho(X, Y)| \leq 1$. [Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]

   Corrigé – *L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace* $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *donne*

   $$|Cov(X,Y)| = |\int_\Omega (X - E(X))(Y - E(Y))dP| \leq (\int_\Omega (X - E(X))^2 dP)^{\frac{1}{2}}(\int_\Omega (Y - E(X))^Y dP)^{\frac{1}{2}}$$
   $$= \sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)},$$

   et donc $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

2. Montrer que si $|\rho(X, Y)| = 1$ alors il existe un a et b dans $\mathbb{R}$ tel que $P(\{X = aY + b\}) = 1$.

   Corrigé – *Le fait que* $|\rho(X, Y)| = 1$ *est équivalent au fait qu'il y ait égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Si* $|\rho(X, Y)| = 1$, *il existe donc* α *et* β *dans* $\mathbb{R}$ *tels que* $\alpha\beta \neq 0$ *et*

   $$\alpha(X - E(X)) + \beta(Y - E(Y)) = 0 \text{ p.s.}.$$

   Comme Var(X)*Var*$(Y) \neq 0$, *on a en fait* $\alpha \neq 0$ *et* $\beta \neq 0$ *et donc, en posant* $a = -\alpha/\beta$ *et* $b = E(Y) - aE(X)$, *on a* $Y = aX + b$ *p.s., c'est-à-dire* $P(\{X = aY + b\}) = 1$.