6.4.2 Convergence étroite et convergence en loi

Si m est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$, on note L_m l'application de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $L_m(\varphi) = \int \varphi dm$ (cette application caractérise m, d'après la proposition 5.8). On a vu au chapitre 5 que $L_m \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})'$. Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. La convergence faible-$*$ dans $(C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})'$ de L_{m_n} vers L_m, quand $n \to +\infty$, signifie donc que $\lim_{n\to+\infty} \int \varphi dm_n = \int \varphi dm$, pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$. Ceci s'appelle la convergence étroite de m_n vers m.

Définition 6.86 (Convergence étroite et vague) *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$.*

1. On dit que $m_n \to m$ étroitement, quand $n \to +\infty$, si :

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})).$$

2. On dit que $m_n \to m$ vaguement, quand $n \to +\infty$, si :

$$\int \varphi dm_n \to \int \varphi dm \text{ pour tout } \varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})).$$

La proposition suivante montre que la convergence vague et la convergence des masses totales donnent la convergence étroite. Si m et les mesures m_n sont des probabilités, la convergence étroite de m_n vers m (quand $n \to +\infty$) est donc équivalente à la convergence vague.

Proposition 6.87 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ vaguement et que $m_n(\mathbb{R}) \to m(\mathbb{R})$ (quand $n \to +\infty$). On a alors $m_n \to m$ étroitement. (La réciproque de cette proposition est immédiate.)*

La démonstration de cette proposition est contenue dans l'exercice 5.14.

Remarque 6.88 Dans la proposition 6.87, l'hypothèse de convergence des masses totales est cruciale. Sans cette hypothèse, la convergence vague n'implique pas la convergence étroite. Un exemple simple est possible en prenant $d = 1$, $m = 0$ et $m_n = \delta_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La convergence en loi d'une suite de v.a.r. est définie par la convergence étroite (ou vague, puisque c'est équivalent pour des probabilités) des lois des v.a.r..

Définition 6.89 (Convergence en loi) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On dit que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$, si :*

$$\int \varphi(X_n) dP \to \int \varphi(X) dP \text{ pour tout } \varphi \in C_b(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

(Ceci est équivalent à dire que $P_{X_n} \to P_X$ étroitement.)
Noter qu'il est possible de définir la convergence en loi pour une suite de v.a.r. définies sur des espaces probabilisés différents (c'est-à-dire que X_n est définie sur l'espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ dépendant de n, et X est définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$). Nous utiliserons parfois implicitement cette définition plus générale.

Comme cela a déjà été dit ci-dessus, la proposition 6.87 donne une caractérisation intéressante de la convergence en loi en utilisant la convergence vague.

Proposition 6.90 (Caractérisation de la convergence en loi) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r.. La suite* X_n *tend vers* X *en loi, quand* $n \to +\infty$*, si et seulement si :*

$$\int \varphi(\mathrm{X}_n)d\mathrm{P} \to \int \varphi(\mathrm{X})d\mathrm{P} \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}). \tag{6.34}$$

DÉMONSTRATION – La condition (6.34) est évidemment nécessaire car $\mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subset \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. D'après la proposition 6.87, la condition (6.34) est aussi suffisante. On redonne ici la démonstration du fait que (6.34) est suffisant pour avoir la convergence en loi de X_n vers X. On note $m_n = \mathrm{P}_{\mathrm{X}_n}$ et $m = \mathrm{P}_{\mathrm{X}}$.

Etape 1. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi_p \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \varphi_p(s) = 0 \text{ si } s \le -p-1, \\ \varphi_p(s) = s+p+1 \text{ si } -p-1 < s < -p, \\ \varphi_p(s) = 1 \text{ si } -p \le s \le p, \\ \varphi_p(s) = -s+p+1 \text{ si } p < s < p+1, \\ \varphi_p(s) = 0 \text{ si } p+1 < s. \end{cases}$$

Comme $(1-\varphi_p) \to 0$ simplement, quand $p \to \infty$, et que $0 \le (1-\varphi_p) \le 1$, le théorème de convergence dominée donne $\lim_{p\to\infty} \int (1-\varphi_p)dm = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}^\star$ t.q.

$$0 \le \int (1-\varphi_{p_0})dm \le \varepsilon.$$

On remarque maintenant que, comme $\varphi_{p_0} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que m_n et m sont des probabilités, on a, quand $n \to +\infty$,

$$0 \le \int (1-\varphi_{p_0})dm = 1 - \int \varphi_{p_0}dm_n \to 1 - \int \varphi_{p_0}dm = \int (1-\varphi_{p_0})dm \le \varepsilon.$$

Il existe n_0 t.q.

$$n \ge n_0 \Rightarrow 0 \le \int (1-\varphi_{p_0})dm_n \le 2\varepsilon. \tag{6.35}$$

Etape 2. Soit $\varphi \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^\star$ on utilise l'égalité $\varphi = \varphi(1-\varphi_p) + \varphi\varphi_p$. Elle donne

$$\int \varphi dm_n - \int \varphi dm = \int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p)dm + \int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm. \tag{6.36}$$

En posant $\|\varphi\|_u = \sup_{s\in\mathbb{R}} |\varphi(s)|$ on a

$$|\int \varphi(1-\varphi_p)dm_n - \int_\varphi (1-\varphi_p)dm| \le \|\varphi\|_u \left(\int (1-\varphi_p)dm_n + \int (1-\varphi_p)dm\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'étape 1, il existe donc $p_1 \in \mathbb{N}^\star$ et $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \ge n_1 \Rightarrow |\int \varphi(1-\varphi_{p_1})dm_n - \int \varphi(1-\varphi_{p_1})dm| \le \varepsilon.$$

Puis, comme $\varphi\varphi_{p_1} \in \mathrm{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \ge n_2 \Rightarrow |\int \varphi\varphi_{p_1}dm_n - \int \varphi\varphi_{p_1}dm| \le \varepsilon.$$

Finalement, l'égalité (6.36) avec $p = p_1$ donne alors

$$n \ge \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \le 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence étroite de m_n vers m et donc la convergence en loi de X_n vers X. ■

Une autre caractérisation intéressante de la convergence en loi est donnée dans le théorème 10.22. Elle donne l'équivalence entre la convergence en loi et la convergence simple des fonctions caractéristiques. La fonction caractéristique d'une v.a.r. est construite avec la transformation de Fourier (qui sera étudiée au chapitre 10).

Remarque 6.91 Un intérêt de la proposition 6.90 (ou du théorème 10.22) est qu'un élément de $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (ou une fonction de la forme $s \mapsto e^{ist}$) est nécessairement uniformément continue (alors qu'une fonction appartenant à $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas toujours uniformément continue). Cela permet, par exemple, de démontrer facilement que la convergence en probabilité implique la convergence en loi (voir l'exercice 6.66).

Une propriété parfois intéressante d'une suite de mesures convergeant étroitement est la tension de cette suite, notion qu'on définit maintenant.

Définition 6.92 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$). On dit que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue si*

$$\lim_{a\to\infty} m_n(B_a^c) = 0, \text{ uniformément par rapport à } n,$$

avec $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq a\}$. (On désigne toujours par $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.)

Dans la proposition précédente, la propriété importante est le caractère uniforme (par rapport à n) de la convergence vers 0 de $m_n(B_a^c)$. En effet, pour tout n fixé, la continuité décroissante de la mesure m_n donne que $\lim_{a\to+\infty} m_n(B_a^c) = 0$. On montre maintenant que la convergence étroite d'une suite implique sa tension.

Proposition 6.93 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $m_n \to m$ étroitement. Alors la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.*

En particulier, soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en loi. La suite $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors tendue, c'est-à-dire

$$\lim_{a\to+\infty} P(\{|X_n| > a\}) = 0 \text{ uniformément par rapport à } n.$$

DÉMONSTRATION – La démonstration de cette proposition est ici aussi essentiellement contenue dans l'exercice 5.14. En effet, soit $\varepsilon > 0$, la question 3 de l'exercice 5.14 montre qu'il existe $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et $\int_{\mathbb{R}^d}(1-\varphi)dm_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $a > 0$ t.q. $\varphi = 0$ sur B_a^c (c'est-à-dire que le support de φ est inclus dans $B_a = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq a\}$), on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(B_a^c) \leq \varepsilon$. Ce qui montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue. ■

On peut maintenant donner une nouvelle caractérisation de la convergence étroite (et donc de la convergence en loi).

Proposition 6.94 *Soit $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures finies sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) et m une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On a alors l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. $m_n \to m$ étroitement quand $n \to +\infty$,

2. $m_n \to m$ vaguement quand $n \to +\infty$ et la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

DÉMONSTRATION – Le fait que la propriété 1 implique la propriété 2 a été vu dans la proposition 6.93. On montre maintenant la réciproque. Pour cela, on reprend la démonstration de la proposition 6.90.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_p \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ par

$$\begin{cases} \varphi_p(x) = 0 \text{ si } |x| \geq p+1, \\ \varphi_p(x) = p+1-|x| \text{ si } p < |x| < p+1, \\ \varphi_p(s) = 1 \text{ si } |x| \leq p. \end{cases}$$

Soit $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ on utilise l'égalité $\varphi = \varphi(1-\varphi_p) + \varphi\varphi_p$. Elle donne

$$\int \varphi dm_n - \int \varphi dm = \int \varphi(1-\varphi_p) dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p) dm + \int \varphi\varphi_p dm_n - \int \varphi\varphi_p dm. \tag{6.37}$$

En posant $\|\varphi\|_u = \sup_{s \in \mathbb{R}^d} |\varphi(s)|$ on a

$$|\int \varphi(1-\varphi_p) dm_n - \int \varphi(1-\varphi_p) dm| \leq \|\varphi\|_u \left(\int (1-\varphi_p) dm_n + \int (1-\varphi_p) dm \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $B_p = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq p\}$. Comme $0 \leq \int (1-\varphi_p) dm_n \leq m_n(B_p^c)$ et $0 \leq \int (1-\varphi_p) dm \leq m(B_p^c)$, l'hypothèse de tension sur la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (et la continuité décroissante pour m) donne l'existence de p_1 t.q., pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi\|_u \int (1-\varphi_{p_1}) dm_n \leq \varepsilon \text{ et } \|\varphi\|_u \int (1-\varphi_{p_1}) dm \leq \varepsilon.$$

Puis, comme $\varphi\varphi_{p_1} \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, la convergence vague donne l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \varphi\varphi_{p_1} dm_n - \int \varphi\varphi_{p_1} dm| \leq \varepsilon.$$

Finalement, l'égalité (6.37) avec $p = p_1$ donne alors

$$n \geq n_0 \Rightarrow |\int \varphi dm_n - \int \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui prouve bien la convergence étroite de m_n vers m. ■

Remarque 6.95 Voici une conséquence intéressante de la proposition 6.94 et de la proposition 8.19 du chapitre 8 (que l'on peut utiliser avec $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ qui est un espace de Banach séparable, ce qui n'est pas le cas de $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$). Soit $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$. On suppose que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue. Il existe alors une sous-suite de la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$, encore notée $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et il existe une probabilité m sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ t.q. $m_n \to m$ étroitement quand $n \to +\infty$. Cette remarque sera détaillée dans la proposition 8.22.

Enfin, on donne maintenant un lien entre convergence en loi et convergence des fonctions de répartition. En particulier, la convergence en loi donne la convergence des fonctions de répartition en tout point de continuité de la fonction de répartition de la v.a.r. limite.

Proposition 6.96 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de v.a.r. et* X *une v.a.r..*

1. *On suppose que* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*. Soit* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $P(\{X = a\}) = 0$ *(c'est-à-dire que la fonction de répartition de* X *est continue au point* a*). On a alors*

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{X_n \geq a\}) = P(\{X \geq a\}) = P(\{X > a\}) = \lim_{n \to +\infty} P(\{X_n > a\}).$$

(La même propriété est vraie en remplaçant > par <.)

2. *On suppose que* $\lim_{n \to +\infty} P(\{X_n \geq a\}) = P(\{X \geq a\})$ *pour tout* $a \in \mathbb{R}$ *t.q.* $P(\{X = a\}) = 0$*. On a alors* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$*.*

Démonstration – Cette proposition se démontre en adaptant légèrement les corrigés des exercices 6.62 et 6.63. (en particulier, le premier item de la proposition 6.96 se démontre avec la première partie du corrigé de l'exercice 6.62). ■

6.4.3 Lois des grands nombres

Dans ce paragraphe, on donne des résultats de convergence (en probabilité, p.s., en loi) pour des sommes de v.a.r. indépendantes. Nous commençons ce paragraphe par un résultat (simple) sur la variance de la somme de v.a.r. indépendantes, dont on déduit la loi faible des grands nombre qui donne non seulement un résultat de convergence (en probabilité) mais aussi des estimations précises sur cette convergence. Puis, on donne la loi forte des grands nombres et on énonce, en remarque, le théorème central limite. On reviendra sur ce théorème central limite au chapitre 10 car on utilisera, pour sa démonstration, la transformation de Fourier (et la remarque 6.95).

Proposition 6.97 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes deux à deux et de carré intégrable. On a alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Var(X_1 + \ldots + X_n) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_n).$$

DÉMONSTRATION – On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $E_i = E(X_i)$. On a alors, par linéarité de l'intégrale, $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E_i$ et :

$$\mathrm{Var}(S_n) = E((S_n - E(S_n))^2) = E(\sum_{i=1}^n (X_i - E_i) \sum_{i=j}^n (X_j - E_j))$$
$$= \sum_{i,j=1}^n E((X_i - E_i)(X_j - E_j)).$$

Pour $i \neq j$, on a, comme X_i et X_j sont indépendantes, $E((X_i - E_i)(X_j - E_j)) = E(X_i - E_i)E(X_j - E_j) = 0$. On en déduit :

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n E((X_i - E_i)^2) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i).$$

■

Proposition 6.98 (Loi faible des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes deux à deux et de carré intégrable. On suppose que ces v.a.r. sont de même moyenne m et de même variance* σ^2. *On pose* $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *(ce sont les moyennes de Cesàro de la suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$*), alors* Y_n *converge en probabilité vers la v.a.r. constante et égale à m, c'est-à-dire que l'on a :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - m| > \varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Plus précisément, on a pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{6.38}$$

DÉMONSTRATION – Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev (lemme 4.57), on a :

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) = P((Y_n - m)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E((Y_n - m)^2).$$

Puis, en posant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, on a $E((Y_n - m)^2) = \frac{1}{n^2}E((S_n - nm)^2) = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2}$. La proposition 6.97 donne $\mathrm{Var}(S_n) = n\mathrm{Var}(X_1) = n\sigma^2$. On en déduit finalement

$$P(|Y_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

■

On donne maintenant la loi forte des grands nombres. La loi forte des grands nombres donne une convergence p.s., ce qui est plus fort qu'une convergence en probabilité (donnée par la loi faible des grands nombres). D'autre part, le deuxième item de la proposition 6.99 (loi forte) ne demande que l'intégrabilité des v.a.r., ce qui est moins fort que de demander qu'elles soient de carré intégrable (hypothèse de la loi faible). La loi forte semble donc, à double titre (hypothèse moins forte et conclusion plus forte), meilleure que la loi faible. Ceci n'est pas tout à fait exact car l'intérêt de la loi faible est de donner une estimation sur la vitesse de convergence (inégalité (6.38)) ce que ne donne pas la loi forte.
On admettra la proposition suivante, qui donne la loi forte des grands nombres (voir par exemple [8, 10])

Proposition 6.99 (Loi forte des grands nombres) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. indépendantes.*

1. *On suppose ici que les* X_n *sont de carré intégrable, que* $\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\mathrm{E}(\mathrm{X}_n^2)}{n^2} < +\infty.$$

On a alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \to 0 \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

2. *On suppose ici que la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d. et que* $\mathrm{E}(|\mathrm{X}_1|) < +\infty$. *Alors :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i \to \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

3. *On suppose ici simplement que la suite* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de v.a.r.i.i.d.. Alors, pour toute fonction* φ *borélienne bornée de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, on a :*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varphi(\mathrm{X}_i) \to \mathrm{E}(\varphi(\mathrm{X}_1)) \text{ p.s., quand } n \to +\infty.$$

Le troisième item de la proposition 6.99 est une conséquence immédiate du deuxième car la suite $(\varphi(\mathrm{X}_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r.i.i.d. et $\mathrm{E}(|\varphi(\mathrm{X}_1)| < +\infty$. Il montre qu'il est possible en pratique d'avoir une idée de la loi d'une v.a.r. en faisant un grand nombre d'expériences indépendantes. (La même remarque s'applique avec la loi faible des grands nombres.)

Remarque 6.100 *Nous verrons au chapitre 10 (théorème 10.24) un résultat de convergence en loi lorsque que l'on s'intéresse à* $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *au lieu de* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ *(comme dans les propositions 6.98 et 6.99). Nous énonçons ici ce résultat (connu sous le nom de théorème central limite).*

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé et* $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r.i.i.d. de carrés intégrables. On note* $m = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)$ *et* $\sigma^2 = Var(\mathrm{X}_1)$*. On pose*

$$\mathrm{Y}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - m).$$

La suite $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge alors en loi vers toute v.a.r.* Y *dont la loi est la loi normale* $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ *(la loi normale, ou loi de Gauss,* $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$*, est définie au chapitre 4 section 4.4 dans le cas* $\sigma^2 \neq 0$ *et* $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$*).*