10.6 Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire

La transformée de Fourier a son équivalent en probabilités : il s'agit de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire (rien à voir avec la fonction caractéristique d'un ensemble !).

Définition 10.19 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d*. On appelle fonction caractéristique de* X *la fonction de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{C}$ *définie par :*

$$\varphi_X(u) = \int_\Omega e^{iX \cdot u} dP = E(e^{iX \cdot u}), \text{ pour } u \in \mathbb{R}^d.$$

Dans la définition précédente, la fonction $e^{iX \cdot u}$ est bien intégrable sur Ω (pour tout $u \in \mathbb{R}^d$) car la fonction $x \mapsto e^{ix \cdot u}$ est continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$. En notant p_X la loi de X, on remarque également que $\varphi_X = (2\pi)^{d/2} \widehat{p}_X(-\cdot)$. La section 10.3 donne alors quelques propriétés élémentaires de la fonction caractéristique d'un v..a..

Proposition 10.20 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d*. La fonction caractéristique de* X *vérifie alors les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_X \in C_b(\mathbb{R}^d, C)$.
2. *La loi de* X *est entièrement déterminée par* φ_X *(c'est-à-dire que si* Y *est un autre v.a. de dimension* d *et que* $\varphi_X = \varphi_Y$*, on a nécessairement* $p_X = p_Y$*).*
3. *Si* $\varphi_X \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$*, la loi de* X *a une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*, c'est-à-dire* $p_X = f\lambda_d$*, et :*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot u} \varphi_X(u) du, \ \ \lambda_d\text{-p.s. en } x \in \mathbb{R}^d.$$

DÉMONSTRATION – Comme $\varphi_X = (2\pi)^{d/2} \widehat{p}_X(-\cdot)$, le premier item est donnée par la proposition 10.13 (qui donne $\widehat{p}_X \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$).

Le deuxième item est donnée par le premier item de la proposition 10.14.

Pour le troisième item, on remarque que le deuxième item de la proposition 10.14 donne $p_X = f\lambda_d$ avec $f = \widehat{\widehat{p_X}}(-\cdot)$, ce qui donne λ_d-p.s. en $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot t} \widehat{p_X}(t) dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot t} \varphi_X(t) dt.$$

■

Les fonctions caractéristiques peuvent être utilisées pour montrer l'indépendance de v.a.r. (ou de v.a.). On donne un exemple dans la proposition suivante.

Proposition 10.21 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d > 1$ *et* $X_1, \ldots, X_d$ *d v.a.r.. Alors, les v.a.r* $X_1, \ldots, X_d$ *sont indépendantes si et seulement si on a*

$$\varphi_X(u) = \prod_{j=1}^{d} \varphi_{X_j}(u_j)$$

pour tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t \in \mathbb{R}^d$*, où* X *est le v.a. de composantes* $X_1, \ldots, X_d$.

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 9.28 les v.a.r. $X_1, \ldots, X_d$ sont indépendantes si et seulement $p_X = p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}$. Par la proposition 10.14, ces deux mesures sont égales si et seulement si leurs transformées de Fourier sont égales, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}) \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Comme $e^{ix\cdot u} = \prod_{j=1}^d e^{ix_j u_j}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d)^t$ et tout $u = (u_1, \ldots, u_d)^t$, la définition de la mesure produit donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot u} d(p_{X_1} \otimes \ldots \otimes p_{X_d}) = \prod_{j=1}^d \varphi_{X_j}(u_j),$$

ce qui termine la démonstration de cette proposition. ■

Il est intéressant aussi de connaître le lien entre convergence en loi et convergence simple des fonctions caractéristiques. Nous donnons ce lien dans le deuxième item du théorème 10.22 (dû à Paul Lévy).

Théorème 10.22 (Convergence en loi et fonctions caractéristiques, Paul Levy) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un suite de v.a. de dimension* d.

1. *On suppose que la fonction caractéristique de* X_n *converge simplement (quand* $n \to +\infty$*) vers une fonction* φ *continue en* 0. *Il existe alors un v.a.* X *t.q.* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$.
2. *Soit* X *un v.a. de dimension* d. *Alors,* $X_n \to X$ *en loi, quand* $n \to +\infty$, *si et seulement si* $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$, *quand* $n \to +\infty$, *pour tout* $u \in \mathbb{R}^d$.

DÉMONSTRATION – Le deuxième item du théorème est une conséquence facile du premier item. En effet, si $X_n \to X$ en loi, on a, bien sûr, $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ (car la fonction $x \mapsto e^{ix\cdot u}$ est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$). Réciproquement, on suppose que $\varphi_{X_n}(u) \to \varphi_X(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$. Comme la fonction φ_X est continue (et donc, en particulier continue en 0), le premier item donne que X_n converge en loi vers un v.a. Y. Mais ceci donne que X et Y ont même fonction caractéristique et donc même loi. On en déduit bien que X_n tend vers X en loi.

Nous démontrons maintenant le premier item du théorème 10.22. Cette démonstration se fait en deux étapes. Dans la première étape on montre que la suite des lois des X_n est tendue (on utilise ici le lemme 10.15 et la continuité de φ). Puis dans la seconde étape on conclut grâce à la proposition 9.21.

Etape 1. On montre dans cette étape que la suite des lois des X_n est tendue. Pour cela, il suffit de montrer que la suite des lois de chaque composante des X_n est tendue. Soit donc $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $(X_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des i–ème composantes des X_n. On note m_n la loi de $X_n^{(i)}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi_n(t) = \frac{1}{2}\varphi_{X_N^{(i)}}(t) + \varphi_{X_N^{(i)}}(-t) = \sqrt{2\pi}\,\frac{\widehat{m}_n(t) + \widehat{m}_n(-t)}{2}$$

Le lemme 10.15 donne alors, pour tout $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq a \int_0^{2/a} (1 - \psi_n(t))dt. \tag{10.6}$$

On a $\varphi_{X_N^{(i)}}(t) = \varphi_{X_n}(te_i)$ (ou e_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$), la fonction $\psi_n(t)$ converge donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et sa limite est une fonction ψ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) continue en 0. Comme $\psi_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\psi(0) = 1$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme ψ est continue en 0 et $\psi(0) = 1$, il existe $a_0 > 0$ t.q. $\max_{t\in[0,2/a_0]}(1 - \psi(t)) \leq \varepsilon$, et donc

$$a_0 \int_0^{2/a_0} (1 - \psi(t))dt \leq 2\varepsilon.$$

La fonction ψ_n converge simplement vers ψ et $0 \leq (1-\psi_n) \leq 1$ le théorème de convergence dominée donne donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi_n(t))dt = a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi(t))dt.$$

Il existe donc n_0 t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_0 \int_0^{2/a_0} (1-\psi_n(t))dt \leq 3\varepsilon.$$

Avec (10.6) on a donc

$$n \geq n_0 \Rightarrow m_n(\{x, |x| \geq a_0\}) \leq 3\varepsilon.$$

D'autre part, en utilisant la continuité décroissante d'une mesure, pour tout $n \in \{1,\ldots,n_0-1\}$, il existe a_n t.q. $m_n(\{x, |x| \geq a_n\}) \leq 3\varepsilon$.

En prenant $a = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{n_0-1}\}$ on a donc

$$m_n(\{x, |x| \geq a\}) \leq 3\varepsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ceci montre bien que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est tendue et termine la première étape.

Etape 2. Dans cette seconde étape il suffit d'utiliser la proposition 9.21. Cette proposition nous donne l'existence d'une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et d'un v.a. X tel que cette sous-suite tende vers X en loi. On en déduit, en particulier que $\varphi_X = \varphi$. Il reste à montrer que toute la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers X en loi (et pas seulement une sous-suite). Pour le montrer, on raisonne par l'absurde. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en loi vers X, il existe $\phi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ t.q. $E(\phi(X_n)) \not\to E(\phi(X))$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous-suite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, que nous noterons aussi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (pour ne pas alourdir les notations), t.q.

$$|E(\phi(X_n)) - E(\phi(X))| \geq \varepsilon. \tag{10.7}$$

Mais, la proposition 9.21 nous donne l'existence d'une sous-suite de cette sous-suite et d'un v.a. Y t.q. la sous-suite de la sous-suite tende vers Y en loi. Comme la convergence en loi donne la convergence simple des fonctions caractéristiques (et que $\varphi_{X_n} \to \varphi$ simplement), on en déduit que $\varphi_Y = \varphi = \varphi_X$. On a donc $P_X = P_Y$. La sous-suite de la sous-suite tend donc vers X en loi. En contradiction avec (10.7). On a bien ainsi montré finalement que $X_n \to X$ en loi. ∎

On donne maintenant la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien.

Proposition 10.23 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé.*

1. *Soit* X *une v.a.r. gaussienne. On note* m *son espérance (donc,* $m = E(X) \in \mathbb{R}$*) et* σ^2 *sa variance (donc,* $\sigma^2 = E((X-m)^2) \geq 0$*) de sorte que* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$*. On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{imu} e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}.$$

2. *Soit* $d \geq 1$ *et* X *une v.a gaussien de dimension* d*. On note* m *son espérance (donc,* $m = E(X) \in \mathbb{R}^d$*) et* D *sa matrice de covariance (donc,* D *est une matrice symétrique, composantes d'indices* j *et* k *de* X*) de sorte que* $X \sim \mathcal{N}(m, D)$ *(proposition 9.33). On a alors :*

$$\varphi_X(u) = e^{im\cdot u} e^{-\frac{1}{2}Du\cdot u}, \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^d.$$

Démonstration – Soit X une v.a.r. gaussienne, $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On suppose tout d'abord que $\sigma^2 = 0$, on a alors $X = m$ p.s. et donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(u) = e^{imu}$, ce qui est bien la formule annoncée. On suppose maintenant que $\sigma > 0$, on a alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Avec le changement de variable $y = \frac{x-m}{\sigma}$, on obtient :

$$\varphi_X(u) = e^{imu} \int_{\mathbb{R}} e^{iy\sigma u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy,$$

ce qui donne $\varphi_X(u) = e^{imu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\sigma u)$ avec $\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} e^{\frac{-y^2}{2}} dy$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme la fonction $y \mapsto e^{y^2}$ est paire, on a aussi :

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Pour calculer $\psi(t)$, on remarque que le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique (théorème 4.53) et donne que ψ est de classe C^1 et

$$\psi'(t) = \int_{\mathbb{R}} (-y) \sin(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy.$$

En intégrant par parties cette dernière intégrale (en fait, on intègre par parties sur $[-n, n]$ puis on fait tendre n vers l'infini), on obtient :

$$\psi'(t) = -\int_{\mathbb{R}} t \cos(yt) e^{\frac{-y^2}{2}} dy = -t\psi(t), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

ce qui donne $\psi(t) = \psi(0) e^{\frac{-t^2}{2}}$. Comme $\psi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$, on en déduit que $\psi(t) = \sqrt{2\pi} e^{\frac{-t^2}{2}}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$) et donc que $\varphi_X(u) = e^{imu} e^{\frac{-\sigma^2 u^2}{2}}$, ce qui est bien la formule annoncée.

On suppose maintenant que $d > 1$ et que X est un v.a. gaussien. Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a $\varphi_X(u) = E(e^{iX \cdot u}) = \varphi_{X \cdot u}(1)$. Pour connaître $\varphi_X(u)$, il suffit donc de connaître la fonction caractéristique de la v.a.r. $X \cdot u$. Comme X est un v.a. gaussien, la v.a.r. $X \cdot u$ est une v.a.r. gaussienne. Sa moyenne est $E(X \cdot u) = E(X) \cdot u = m \cdot u$ et sa variance est (voir l'exercice 9.5) :

$$\sigma^2 = E((X \cdot u - m \cdot u)^2) = E(u^t (X - m)(X - m)^t u) = u^t \mathrm{Cov}(X) u = u^t D u.$$

On a donc, d'après la première partie de cette démonstration (c'est-à-dire le cas $d = 1$),

$$\varphi_X(u) = \varphi_{X \cdot u}(1) = e^{im \cdot u} e^{-\frac{u^t D u}{2}},$$

ce qui est bien la formule annoncée (car $u^t D u = Du \cdot u$). ■

On montre enfin le théorème central limite, qui nous dit que toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend en loi vers une variable aléatoire gaussienne.

Théorème 10.24 (Théorème central limite) *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a. de dimension* d *i.i.d.. On suppose que* $E(|X_1|^2) < \infty$. *On pose* $E(X_1) = m$, $D = Cov(X_1)$ *et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m).$$

La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *converge alors en loi vers tout v.a.* Y *dont la loi est la loi normale multidimensionnelle* $\mathcal{N}(0, D)$. *(Voir la définition 9.5 et la proposition 9.33 pour la définition de cette loi normale multidimensionnelle.)*

DÉMONSTRATION – D'après le théorème 10.22 et la proposition 10.23, il suffit de montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_{Y_n}(u) = e^{-\frac{u^t D u}{2}},$$

où φ_{Y_n} est la fonction caractéristique du v.a. Y_n.

Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\varphi_{Y_n}(u) = E(e^{iY_n \cdot u}) = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{n} (X_p - m) \cdot u}) = E(\prod_{p=1}^{n} e^{\frac{i}{\sqrt{n}} (X_p - m) \cdot u}).$$

Les v.a. X_p ($p = 1, \ldots, n$) étant indépendants et identiquement distribués, on a donc, par la proposition 9.27 (cette proposition est écrite pour des fonctions à valeurs réelles mais elle s'étend à des fonctions à valeurs complexes en décomposant les fonctions en parties réelles et imaginaires),

$$\varphi_{Y_n}(u) = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u})^n. \tag{10.8}$$

On pose $z_n = E(e^{\frac{i}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u})$ et on calcule maintenant z_n en faisant un développement limité des fonctions cos et sin. Il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 appartenant à $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\lim_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0$, $i = 1, 2$ et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \text{ et } \sin(x) = x + x^2\varepsilon_2(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP = 1 - \frac{1}{2n}\int_\Omega ((X_1 - m)\cdot u)^2 dP \\ + \frac{1}{n}\int_\Omega ((X_1 - m)\cdot u)^2\varepsilon_1(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP = \frac{1}{2n}\int_\Omega (X_1 - m)\cdot u dP \\ + \frac{1}{n}\int_\Omega ((X_1 - m)\cdot u)^2\varepsilon_2(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP.\end{aligned}$$

Comme $E(|X_1|^2) < +\infty$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega ((X_1 - m)\cdot u)^2\varepsilon_i(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega ((X_1 - m)\cdot u)^2 dP &= \int_\Omega u^t(X_1 - m)(X_1 - m)^t u dP \\ &= u^t\Big(\int_\Omega (X_1 - m)(X_1 - m)^t dP\Big)u = u^t D u.\end{aligned}$$

et

$$\int_\Omega (X_1 - m)\cdot u dP = \Big(\int_\Omega (X_1 - m)dP\Big)\cdot u = 0.$$

En posant $a = \frac{u^t D u}{2}$, on a donc

$$\int_\Omega \cos(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP = 1 - \frac{b_n}{n}, \int_\Omega \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\cdot u)dP = \frac{c_n}{n},$$

avec $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$. En posant $a_n = b_n + ic_n$, on a donc $z_n = (1 - \frac{a_n}{n})$ avec $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. Avec (10.8), ceci donne

$$\varphi_{Y_n}(u) = z_n^n = (1 - \frac{a_n}{n})^n.$$

Comme $a \in \mathbb{R}$, le lemme 10.25 donne le résultat, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}\varphi_{Y_n}(u) = e^{-a} = e^{-\frac{u^t D u}{2}}$. ■

Lemme 10.25

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes t.q. $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{a_n}{n})^n = e^{-a}.$$

DÉMONSTRATION – Ce lemme est bien connu si $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de remarquer que $a_n < n$ pour n assez grand et que $\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{a_n}{n}) = -\lim_{n\to+\infty} a_n = -a$. La difficulté est ici que a_n peut ne pas être un nombre réel.

On pose $z_n = 1-\frac{a_n}{n}$ et $y_n = 1-\frac{a}{n}$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car elle est convergente), il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ t.q. $|a_n| \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc $|z_n| \leq 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$ (et aussi $|y_n| \leq 1+\frac{\mathrm{M}}{n}$). On a alors (en écrivant $\varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt$ avec $\varphi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ définie par $\varphi(t) = (tz_n+(1-t)y_n)^n$)

$$z_n^n - y_n^n = n(z_n-y_n)\int_0^1 (tz_n+(1-t)y^n)^{n-1}\,dt.$$

Comme $|tz_n+(1-t)y_n| \leq t|z_n|+(1-t)|y_n| \leq 1+\dfrac{\mathrm{M}}{n} \leq e^{\frac{\mathrm{M}}{n}}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$), on en déduit que

$$|z_n^n - y_n^n| \leq n|z_n-y_n|e^{\mathrm{M}} = |a-a_n|e^{\mathrm{M}}.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} z_n^n = \lim_{n\to+\infty} y_n^n = \lim_{n\to+\infty}(1-\frac{a}{n})^n = e^{-a}$. ∎