Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, probabilités-Statistique
Partiel du 3 mars 2016

Le partiel contient 5 exercices. Le barème est sur 22 points.

Exercice 1 (Convergence en probabilité d'une somme, barème 3 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité et $Y_n \to Y$ en probabilité, quand $n \to +\infty$.
On pose $Z_n = X_n + Y_n$. Montrer que $Z_n \to X + Y$ en probabilité quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. Comme*

$$\{|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\},$$

on a, par σ-additvité de P, $P(\{|X_n+Y_n-X-Y| \geq \varepsilon\}) \leq P(\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) + P(\{|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\})$, et donc, comme $X_n \to X$ en probabilité et $Y_n \to Y$ en probabilité,

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{|X_n + Y_n - X - Y| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{n\to+\infty} P(\{|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) + \lim_{n\to+\infty} P(\{|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) = 0.$$

Ceci prouve bien que $Z_n \to X + Y$ en probabilité quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne, barème 2 points) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Soit $Y = \exp(X)$. Calculer la densité de Y (si elle existe).

Corrigé – *Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$E(\varphi(Y)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(e^x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Le changement de variable $y = e^x$ donne alors

$$E(\varphi(Y)) = \int_0^{+\infty} \varphi(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}} dy.$$

La v.a.r. Y a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction g définie par :
$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{\ln(y)^2}{2}}$ si $y > 0$ et $g(y) = 0$ si $y \leq 0$.

Exercice 3 (Calcul de lois, barème 5 points) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et (X, Y) un vecteur aléatoire (de dimension 2) de loi de densité

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

1. Déterminer la densité de la loi de la v.a.r. $X^2 + Y^2$.

Corrigé – *On pose $Z = X^2 + Y^2$. Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$E(\varphi(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x^2 + y^2) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d(x, y).$$

On peut passer dans cette intégrale en coordonnées polaires. On obtient

$$E(\varphi(Z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \varphi(r^2) e^{-\frac{1}{2}r^2} r d\theta dr = \int_0^{+\infty} \varphi(r^2) e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr.$$

Le changement de variable $r^2 = s$ donne alors

$$E(\varphi(Z)) = \int_0^{+\infty} \varphi(s) e^{-\frac{1}{2}s} \frac{1}{2} ds.$$

La v.a.r. Z a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction g définie par :
$g(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}s}$ si $y > 0$ et $g(y) = 0$ si $y \leq 0$.

2. Déterminer la densité de la loi de la v.a.r. $|X| + |Y|$.

Corrigé – *On pose $T = |X| + |Y|$. Soit φ une fonction borélienne bornée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$E(\varphi(T)) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(|x| + |y|) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d(x,y).$$

La parité en x et en y de la fonction que l'on intègre sur $\mathbb{R}^2$ nous permet d'écrire

$$E(\varphi(T)) = 4 \int_{(\mathbb{R}_+)^2} \varphi(x + y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} d(x,y).$$

Le théorème de Fubini-Tonelli nous donne alors

$$E(\varphi(T)) = 4 \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} \varphi(x + y) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy \Big) dx.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on utilise le changement de variable $x + y = z$ dans l'intégrale par rapport à y. On obtient

$$E(\varphi(T)) = 4 \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} \varphi(z) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2)} 1_{]x,+\infty[}(z) dz \Big) dx.$$

On remarque maintenant que $\frac{1}{2}(x^2 + (z - x)^2) = x^2 - zx + \frac{1}{2}z^2 = (x - \frac{1}{2}z)^2 + \frac{1}{4}z^2$. Ceci donne en réutilisant le théorème de Fubini-Tonelli et le fait que $1_{]x,+\infty[}(z) = 1_{]0,z[}(x)$

$$E(\varphi(T)) = 4 \int_0^{+\infty} \varphi(z) e^{-\frac{1}{4}z^2} \Big(\int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2)} dx \Big) dz.$$

Le changement de variable $x - \frac{1}{2}z = \frac{t}{\sqrt{2}}$ nous donne

$$\int_0^z \frac{1}{2\pi} e^{-(x-\frac{1}{2}z)^2)} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}z}^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}z} \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} e(\frac{\sqrt{2}}{2}z),$$

en posant pour $s \geq 0$, $e(s) = \int_0^s e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On obtient donc

$$E(\varphi(T)) = \int_0^{+\infty} \varphi(z) \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e(\frac{\sqrt{2}}{2}z) e^{-\frac{1}{4}z^2} dz.$$

La v.a.r. T a donc une densité. Cette densité est donnée par la fonction g définie par :
$g(y) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} e(\frac{\sqrt{2}}{2}z) e^{-\frac{1}{4}z^2}$ si $y > 0$ et $g(y) = 0$ si $y \leq 0$.

Exercice 4 (Indépendance et indépendance 2 à 2, barème 4 points)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X_1, X_2, X_3 trois v.a.r. indépendantes. On suppose que chaque X_i a pour loi la loi discrète uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pour $i \neq j$, on pose $A_{i,j} = \{X_i = X_j\}$.

1. Pour $i \neq j$, calculer $P(A_{i,j})$.

Corrigé – *Soit $i \neq j$. On a, en utilisant l'indépendance de X_i avec X_j, puis le fait que X_i et X_j ont pour loi la loi discrète uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,*

$$P(A_{i,j}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_i = k\} \cap \{X_j = k\}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_i = k\} P(\{X_j = k\} = 6 \frac{1}{6} \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

2. Montrer que $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ et $A_{2,3}$ sont indépendants 2 à 2 mais ne sont pas indépendants.

Corrigé – *Pour montrer l'indépendance 2 à 2 des trois événements $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ et $A_{2,3}$, on utilise l'indépendance des trois v.a.r. X_1, X_2, X_3 (et pour ce calcul l'indépendance 2 à 2 des trois v.a.r. suffit) :*

$$\begin{aligned} P(A_{1,2} \cap A_{1,3}) &= P(A_{1,2} \cap A_{2,3}) = P(A_{2,3} \cap A_{1,3}) = P(\{X_1 = X_2 = X_3\}) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(\{X_1 = k\} \cap \{X_2 = k\} \cap \{X_3 = k\}) = \sum_{k=1}^{6} P(\{X_1 = k\}) P(\{X_2 = k\}) P(\{X_3 = k\}) = \frac{1}{6^2}. \end{aligned}$$

Avec la première question, on en déduit bien l'indépendance 2 à 2 de $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ et $A_{2,3}$.
(On a, par exemple, $P(A_{1,2} \cap A_{1,3}) = P(A_{1,2})P(A_{1,3})$.)
Enfin, pour montrer que $A_{1,2}$, $A_{1,3}$ et $A_{2,3}$ ne sont pas indépendants, on remarque que

$$P(A_{1,2} \cap A_{1,3} \cap A_{2,3}) = P(\{X_1 = X_2 = X_3\}) = \frac{1}{6^2} \neq P(A_{1,2})P(A_{1,3})P(A_{2,3}) = \frac{1}{6^3}.$$

Exercice 5 (Une caratérisation de la convergence en loi, barème 8 points)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On note m_n la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et m la loi de X. On note F_Y la fonction de répartition de Y (pour $Y = X$ ou $Y = X_n$).

1. On suppose, dans cette question, que X_n converge en loi vers X quand $n \to +\infty$. (c'est-à-dire que $E(\varphi(X_n)) \to E(\varphi(X))$ pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

(a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que F_X est continue au point a (on dit que a est un point de continuité de F_X).
Montrer que $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.
[Question difficile, reprendre une démonstration faite en cours. . .]

Corrigé – *On pose $\varphi = 1_{]-\infty,a]}$ de sorte que*
$F_{X_n}(a) = m_n(]-\infty, a]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n$ *et* $F_X(a) = m(]-\infty, a]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.
On peut construire deux suites de fonctions appartenant à $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, notées $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_p)_{p\in\mathbb{N}}$, telles que

- $\varphi \leq \varphi_p \leq 1$ *et* $\varphi_p(x) \to \varphi(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *quand* $p \to +\infty$.
- $0 \leq \psi_p \leq \varphi$ *et* $\varphi_p(x) \to \varphi(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$ *quand* $p \to +\infty$.

Pour construire ψ_p et φ_p, on peut, par exemple, prendre ψ_p et φ_p affines par morceaux et égales à φ sur le complémentaire de l'intervalle $]a - 1/p, a + 1/p[$.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme $\psi_p \leq \varphi \leq \varphi_p$, on a

$$E(\psi_p(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm_n \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm_n = E(\varphi_p(X_n)).$$

Comme $X_n \to X$ en loi, on en déduit, quand $n \to +\infty$,

$$E(\psi_p(X)) = \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm = E(\varphi_p(X)). \tag{1}$$

On peut maintenant faire $p \to +\infty$ dans ces inégalités.
Comme φ_p converge simplement vers φ et est dominée par $1_{\mathbb{R}}$, on a, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_p dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On utilise maintenant le fait que F est continue en a, ce qui donne $m(a) = \lim_{k\to+\infty} F(a) - F(a - 1/k) = 0$. On a donc $\psi_p \to \varphi$ p.p. pour la mesure m. On peut donc aussi appliquer le théorème de convergence dominée, il donne

$$\lim_{p\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_p dm = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On passe maintenant à la limite quad $p \to +\infty$ dans (1) pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

On a donc $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.

(b) Donner un exemple pour lequel il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $F_{X_n}(a) \not\to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *Il suffit de prendre X_n telle que $X_n = 1/n$ p.s. et $X = 0$ p.s.. On a bien que $X_n \to X$ en loi, mais, pour $a = 0$, $F_{X_n}(a) = 0 \not\to 1 = F_X(a)$.*

2. On note C l'ensemble des points de continuité de F_X et on suppose, dans cette question, que, pour tout $a \in C$, $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ quand $n \to +\infty$. L'objectif de la question est de montrer que que X_n converge en loi vers X quand $n \to +\infty$.

(a) Montrer que $m_n(]a, b]) \to m(]a, b])$, quand $n \to +\infty$, pour tout $a, b \in C$, $a < b$.

Corrigé – *Soit $a, b \in C$, $a < b$.*
Il suffit de remarquer que $m_n(]a, b]) = F_{X_n}(b) - F_{X_n}(a)$ et $m(]a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$. Comme $a, b \in C$, on a $F_{X_n}(b) \to F_X(b)$ et $F_{X_n}(a) \to F_X(a)$ et donc $m_n(]a, b]) \to m(]a, b])$.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $\varphi \in S$ si il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $a_0, \ldots, a_p \in C$ t.q. $a_0 < \ldots < a_p$. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$.

(b) Soit $\varphi \in S$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm, \text{ quand } n \to +\infty.$$

Corrigé – *On a, en utilisant la définition de S, $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{]a_{i-1},a_i]}$ et donc, en utilisant la linéarité de l'intégrale et la question précédente (car $a_i \in C$),*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n = \sum_{i=1}^p \alpha_i m_n(]a_{i-1}, a_i]) \to \sum_{i=1}^p \alpha_i m(]a_{i-1}, a_i]) = \int_{\mathbb{R}} \varphi dm.$$

(c) (Question hors barème, +4 points) Montrer que S est dense dans $\mathbb{R}$ et en déduire que pour tout $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $\psi \in S$ telle que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$.

(d) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \to \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$. [Utiliser la question hors barème.]

Corrigé – *Soit $\varepsilon > 0$. La question 2c donne l'existence de $\psi \in S$ t.q. $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$*

$$\begin{aligned} |\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| &\leq |\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm_n| + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm| + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \\ &\leq 2\varepsilon + |\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm|. \end{aligned}$$

Comme $\psi \in S$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $|\int_{\mathbb{R}} \psi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \psi dm| \leq \varepsilon$. On a donc, pour tout $n \geq n_0$,

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi dm| \leq 3\varepsilon.$$

Ce qui termine la question.

(e) Déduire de la question précédente que $X_n \to X$ en loi, quand $n \to +\infty$.

Corrigé – *La question 2d donne la converge vague de m_n vers m et donc la converge étroite de m_n vers m (car m_n et m sont des probabilités). On a donc $X_n \to X$ en loi quand $n \to +\infty$.*