Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, probabilités-Statistique
Partiel du 9 mars 2016

Le partiel contient 2 exercices. Le barème est sur 20 points.

Exercice 1 (Détermination de lois. Barème : 10 points)
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y^2 > x\}.$$

1. Dessiner D.

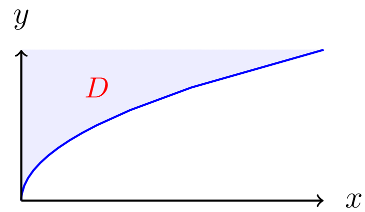

FIGURE 1: Domaine D

Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et (X, Y) un couple de v.a.r. dont la loi a une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-y} & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \notin D. \end{cases}$$

2. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

Corrigé – *On a bien $f \geq 0$ p.p. et, avec le théorème de Fubini-Tonelli et une intégration par parties,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-y} \Big(\int_0^{y^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Big) dy = \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1.$$

Ccei donne bien que f est une densité de probabilité.

3. Déterminer les lois de X et Y, et les espérances de X et Y.

Corrigé – *La loi de X est une loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Cette densité est donnée par la fonction g définie par*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \text{ si } x > 0,$$
$$g(x) = 0 \text{ si } x < 0.$$

La loi de Y est une loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Cette densité est donnée par la fonction h définie par

$$h(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx = e^{-y} \int_0^{y^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = y e^{-y} \text{ si } y > 0,$$
$$h(y) = 0 \text{ si } y < 0.$$

La connaissance de g et h permet de calculer les espérances de X et Y. On obtient, avec des changements de variables et des intégrations par parties :

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} xg(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy = \int_0^{+\infty} 2ye^{-y}dy = 2.$$

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} xh(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2.$$

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé – *Avec les notations de la question précédente, on remarque, par exemple, que*

$$f(x,y) - g(x)h(y) = -\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}ye^{-y} \neq 0 \text{ pour } (x,y) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2 \setminus D.$$

Ce qui permet d'affirmer que X et Y ne sont pas indépendantes, car l'indépendance de X et Y donnerait $f(x,y) - g(x)h(y) = 0$ pour presque tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ("presque tout" étant pris ici au sens de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$).

5. Calculer Cov(X,Y).

Corrigé – *$Cov(X,Y) = E((X-2)(Y-2)) = E(XY) - 2E(Y) - 2E(X) + 4 = E(XY) - 4$. On calcule maintenant $E(XY)$ en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli et deux intégrations par parties,*

$$E(XY) = \int_D xy\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-y}d(x,y) = \int_0^{+\infty} ye^{-y}(\int_0^{y^2} \frac{\sqrt{x}}{2}dx)dy = \int_0^{+\infty} ye^{-y}\frac{y^3}{3}dy$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{4}{3}y^3e^{-y}dy = \int_0^{+\infty} 4y^2e^{-y}dy = 8.$$

On a donc $Cov(X,Y) = 4$.

6. *Question facultative, hors barème.* Déterminer la loi de la v.a.r. XY.
[On pourra utiliser la fonction g définie, pour $x \geq 0$, par $g(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$.]

Corrigé – *On pose $Z = XY$. Soit φ une fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a (en utilisant le théorème de Fubini)*

$$E(\varphi(Z)) = E(\varphi(XY)) = \int_D \varphi(xy)\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-y}d(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-y}(\int_0^{y^2} \frac{\varphi(xy)}{2\sqrt{x}}dx)dy.$$

Pour y fixé, on utilise le changement de variable $z = xy$, puis on utilise le théorème de Fubini. On obtient ainsi

$$E(\varphi(Z)) = \int_0^{+\infty} e^{-y}(\int_0^{y^3} \frac{\varphi(z)}{2\sqrt{zy}}dz)dy = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(z)}{\sqrt{z}}(\int_{z^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y}}dy)dz.$$

Le changement de variable $\sqrt{y} = x$ donne

$$\int_{z^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{2\sqrt{y}}dy = \int_{z^{\frac{1}{6}}}^{+\infty} e^{-x^2}dx = g(z^{\frac{1}{6}}).$$

On en déduit que Z a une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $B(R)$) et cette densité est la fonction h définie par

$$h(z) = \frac{g(z^{\frac{1}{6}})}{\sqrt{z}} \text{ si } z > 0,$$
$$h(z) = 0 \text{ si } z < 0$$

Exercice 2 (Indépendance et inégalité. Barème : 10 points) Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r..

1. On suppose dans cette question que X et Y sont indépendantes et que $Y > X$ p.s..

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $P(\{Y < t\})(1 - P(\{X < t\})) = 0$.

Corrigé – *Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant l'indépendance de X et Y et $Y > X$ p.s., on obtient*

$$0 \le P(\{Y < t\})(1 - P(\{X < t\})) = P(\{Y < t\})P(\{X \ge t\})$$
$$= P(\{Y < t\} \cap \{X \ge t\}) \le P(\{X \ge Y\}) = 0,$$

et donc $P(\{Y < t\})(1 - P(\{X < t\})) = 0$.

(b) Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $P(\{Y < t\}) = 0$.

Corrigé –
On note F_X la fonction de répartition de X. Comme $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$, il existe $t \in \mathbb{R}$ telle que $F_X(t) < 1$. On a donc $P(\{X < t\}) \le F_X(t) < 1$. Ce qui donne $(1 - P(\{X < t\}) > 0$ et donc, par la question précédente, $P(\{Y < t\}) = 0$.

(c) On pose $a = \sup\{t \in \mathbb{R};\ P(\{Y < t\}) = 0\}$.
Montrer que $a \in \mathbb{R}$, $P(\{Y < a\}) = 0$ et $P(\{X > a\}) = 0$.

Corrigé – *D'après la question précédente, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R};\ P(\{Y < t\}) = 0\}$ est non vide. Comme $\lim_{t\to\infty} P(\{Y < t\}) = 1$, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R};\ P(\{Y < t\}) = 0\}$ est bornée supérieurement. On a donc bien $a \in \mathbb{R}$ et la monotonie de F_Y, la fonction de répartition de Y, donne $\{t \in \mathbb{R};\ P(\{Y < t\}) = 0\} =]-\infty, a]$ ou $]-\infty, a[$.*
Pour montrer que $P(\{Y < a\}) = 0$, on remarque que $\{Y < a\} = \cup_{n\in\mathbb{N}^\star}\{Y < a - 1/n\}$. La σ-addivité de P donne alors

$$0 \le P(\{Y < a\}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}^\star} P(\{Y < a - \frac{1}{n}\}) = 0,$$

et donc $P(\{Y < a\}) = 0$.
Enfin, pour $t > a$, on a $P(\{Y < t\}) \neq 0$ et donc, par la première la question, $P(\{X < t\}) = 1$ et donc aussi $F_X(t) = 1$. Comme F_X est continue à droite, on en déduit $F_X(a) = 1$, ce qui donne bien $P(\{X > a\}) = 0$.

2. On suppose que X modélise la durée de vie d'un moustique et Y la durée de vie d'un éléphant.

(a) Le web suggère de prendre comme loi pour X une loi exponentielle de paramètre α et comme loi pour Y une loi exponentielle de paramètre β, avec $0 < \beta < \alpha$. (On rappelle que la loi exponentielle de paramètre λ est la loi de densité f_λ avec $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ et $f_\lambda(x) = 0$ pour $x < 0$.)

Peut-on considèrer que X et Y sont indépendantes et que $Y > X$ p.s. (c'est-à-dire que l'éléphant vit presque sûrement plus longtemps que le moustique...) ?

Corrigé – *La réponse est "non" car si $Y > X$ p.s., la question 1c donne l'existence $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(\{X > a\}) = 0$. Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

$$P(\{X > a\}) = \int_a^{+\infty} f_\alpha(x)dx > 0.$$

(b) Soit $0 < a < b < c$. On suppose maintenant que X a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[0, a]$ et que Y a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[b, c]$ (on ne s'intéresse pas à la mortalité infantile des éléphants).

A t-on $Y > X$ p.s. ?

Existe-t-il un espace probabilisé (Ω, T, P) et deux v.a.r. indépendantes X et Y telles que X a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[0, a]$ et Y a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[b, c]$? Si oui, donner un exemple.

Corrigé – *On a $X \leq a$ p.s. et $Y \geq b$ p.s.. Comme $a < b$, on a donc bien $Y > X$ p.s..*

Il existe bien un espace probabilisé (Ω, T, P) et deux v.a.r. indépendantes X et Y telles que X a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[0, a]$ et Y a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[b, c]$. Pour constuire un exemple, on note p_1 la loi uniforme sur $[0, a]$ et p_2 la loi uniforme sur $[b, c]$. On prend $(\Omega, T, P) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), P)$, avec $P = p_1 \otimes p_2$.

Pour $\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \in \Omega$, on pose $X(\omega) = \omega_1$ et $Y(\omega) = \omega_2$.

On a alors $P_X = p_1$ et $P_Y = p_2$ et la loi du couple (X, Y) est $p_1 \otimes p_2$, ce qui prouve que X et Y sont indépendantes et donne bien un exemple de deux v.a.r. indépendantes X et Y telles que X a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[0, a]$ et Y a une loi de densité dont la densité a pour support l'intervalle $[b, c]$.