Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, probabilités-Statistique
Partiel du 15 mars 2018

Le partiel contient 3 exercices. Le barème est sur 22 points. Le polycopié du cours, les notes de cours et de TD sont autorisés.

Exercice 1 (Indépendance de deux v.a.r.. Barème : 7 points)
Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, S deux v.a.r. indépendantes. On suppose que la loi de X est la loi normale réduite $\mathcal{N}(0,1)$ et que $P(\{S=2\}) = P(\{S=-2\}) = \frac{1}{2}$. On pose $Y = SX$.

1. Déterminer la loi de la v.a.r. Y

Corrigé – *Soit $\varphi \in B_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'indépendance de X et S donne $P_{S,X} = P_S \times P_X$ et donc*
$$E(\varphi(Y)) = \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(2x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi(-2x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\Big) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}x^2}dx.$$
Ceci prouve que $Y \sim \mathcal{N}(0,4)$.

2. Calculer $E(XY)$ et $\text{Cov}(X,Y)$.

Corrigé –
On remarque tout d'abord que XY est intégrable car $E(|XY|) = E(2X^2) = 2Var(X) = 2$. Puis, en utilisant l'indépendance de X et S, on a
$$E(XY) = E(SX^2) = E(S)E(X^2) = 0 \ (\textit{car } E(S) = 0 \textit{ et } E(X^2) = 1)$$
et, comme $E(X) = E(Y) = 0$, $Cov(X,Y) = E(X,Y) = 0$.

3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé – *Les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.*
Pour le montrer, on remarque que $E(|X||Y|) \neq E(|X|)E(|Y|)$. En effet :
$$E(|X||Y|) = E(2X^2) = 2Var(X) = 2$$
et
$$E(|X|) = \int_R |x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = 2\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}},\ E(|Y|) = 2E(|X|) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$
On en déduit que $2 = E(|X||Y|) \neq E(|X|)E(|Y|) = \frac{4}{\pi}$.

4. Donner la loi de la v.a.r. $2X + Y$.

Corrigé – *Soit $\varphi \in B_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On utilise encore l'indépendance de X et S, elle donne*
$$\begin{aligned} E(\varphi(2X+Y)) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(4x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi(0)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\frac{1}{8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{32}x^2}dx + \frac{1}{2}\varphi(0). \end{aligned}$$
Ceci donne que $(2X+Y) \sim (\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\mathcal{N}(0,16))$.

5. Question subsidiaire, hors barème. Le vecteur aléatoire dont les composantes sont X et Y est-il un vecteur gaussien ?

Corrigé – *Non, car la loi de $2X + Y$ n'est pas une loi gaussienne.*

Exercice 2 (Détermination de lois. Barème : 9 points)
Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^2$)

$$f(x,y) = k(1+xy) \text{ si } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1,$$
$$f(x,y) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Dessiner l'ensemble $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ et trouver la ou les valeurs possibles de k pour lesquelles f est bien une densité de probabilité.

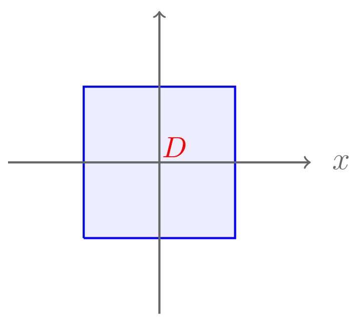

FIGURE 1: Domaine D

Corrigé – *La fonction f doit être positive (p.p.) et d'intégrale (de Lebesgue) égale à 1. Comme*

$$\int_{]-1,1[^2} (1+xy)d(x,y) = 4,$$

la fonction f est une densité de probabilité (par rapport à la mesure de Lebesgue) si et seulement si $k = \frac{1}{4}$.

2. Donner les densités de X et Y.

Corrigé – *Les v.a.r. X et Y ont des densités (par rapport à la mesure de Lebesque sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). On les obtient par intégration de la fonction f. Comme $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout (x,y) les densités de X et Y sont égales (p.p.). On note g cette densité et on a, pour presque tout x dans $\mathbb{R}$,*

$$g(x) = \frac{1}{4}\int_{-1}(1+xy)dy = \frac{1}{2} \text{ si } x \in]-1,1[,$$
$$g(x) = 0 \text{ si } x \notin]-1,1[.$$

Ceci montre que X et Y ont pour loi la loi uniforme sur $]-1,1[$.

3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

   Corrigé – Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car $f(x,y) \neq g(x)g(y)$ p.p. sur $]-1,1[^2$.

4. Soit φ une fonction mesurable telle que $x \mapsto |x|\varphi(x^2)$ est intégrable sur $[-1,1]$.
   Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\varphi(x^2)dx = 0$.

   Corrigé – Il suffit de remarquer que le changement de variable $y = -x$ donne
   $$\int_{-1}^{0} x\varphi(x^2)dx = \int_{0}^{1} (-x)\varphi(x^2)dx = -\int_{0}^{1} x\varphi(x^2)dx.$$

5. En déduire le calcul de $E(\varphi(X^2)\psi(Y^2))$, $E(\varphi(X^2))$ et $E(\psi(Y^2))$ pour des fonctions mesurables φ et ψ telles que ces espérances ont un sens. Les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

   Corrigé – Soient φ et ψ deux fonctions boréliennes (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). On suppose que les espérances données dans l'énoncé ont un sens, c'est-à-dire que les fonctions dont on prend l'espérance sont positives ou intégrables. On a alors
   $$E(\varphi(X^2)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \varphi(x^2)dx,$$
   $$E(\psi(Y^2)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \psi(y^2)dy,$$
   $$E(\varphi(X^2)\psi(Y^2)) = \frac{1}{4}\int_{]-1,1[^2} \varphi(x^2)\varphi(h^2)d(xy) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \varphi(x^2)dx \int_{-1}^{1} \psi(y^2)dy.$$
   On en déduit que $E(\varphi(X^2)\psi(Y^2)) = E(\varphi(X^2))E(\psi(Y^2))$. Ce qui prouve que X^2 et Y^2 sont indépendantes.

Exercice 3 (Indépendance de v.a.r. discrètes. Barème : 6 points)
Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires discrètes et indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On a donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{X = k\}) = P(\{Y = k\}) = p(1-p)^{k-1}.$$

On définit aussi les variables aléatoires :

$$D = X - Y \text{ et } M = \min(X, Y).$$

1. Calculer $P(\{M > j\})$ pour tout entier $j \in \mathbb{N}$. En déduire que M suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

Corrigé – *Soit $j \in \mathbb{N}$. On remarque que $\{M > j\} = \{X > j\} \cap \{Y > j\}$. Comme X et Y sont indépendantes et même loi, on en déduit que*

$$P(\{M > j\}) = P(\{X > j\})P(\{Y > j\}) = P(\{X > j\})^2.$$

Par σ-additivité de P, on a

$$P(\{X > j\}) = \sum_{k=j+1}^{+\infty} P(\{X = k\}) = \sum_{k=j+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^j \frac{1}{p} = (1-p)^j.$$

On a donc $P(\{M > j\}) = (1-p)^{2j}$.

La v.a.r. M prend, comme X et Y, ses valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$\begin{aligned} P(\{M = k\} &= P(\{M > k-1\}) - P(\{M > k\}) = (1-p)^{2k-2} - (1-p)^{2k} \\ &= (1-p)^{2(k-1)}(1-(1-p)^2) = (1-p)^{2(k-1)}(2p - p^2). \end{aligned}$$

La v.a.r. M suit donc une loi géométrique de paramètre $p(2-p)$.

2(a) Soit $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Selon que $i < 0$ ou $i \geq 0$, exprimer l'évènement

$$\{D = i\} \cap \{M = j\}$$

à l'aide de deux évènements faisant, chacun d'entre eux, intervenir séparemment X et Y.

Corrigé –

Pour $i \geq 0$ et $j \in \mathbb{N}^\star$, on a $\{D = i\} \cap \{M = j\} = \{X = i + j\} \cap \{Y = j\}$.

Pour $i < 0$ et $j \in \mathbb{N}^\star$, on a $\{D = i\} \cap \{M = j\} = \{Y = j - i\} \cap \{X = j\}$.

(b) Donner l'ensemble des valeurs prises par le couple (D, M).

Corrigé – *Comme X et Y sont (presque sûrement) à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, la v.a.r. D prend donc ses valeurs dans $\mathbb{Z}$ et v.a.r. M prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Le couple (D, M) prend donc (presque sûrement) ses valeurs dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$. On peut aussi remarquer que, pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, on a $P(\{(D, M)\}) > 0$ grâce à la question précédente et à l'indépendance de X et Y.*

(c) Déduire de ce qui précède la loi du couple (D, M).

Corrigé – *Pour $i \geq 0$ et $j \in \mathbb{N}^\star$, on a, grâce à l'indépendance de X et Y,*

$$\begin{aligned} P(\{(D, M) = (i, j)\}) &= P(\{D = i\} \cap \{M = j\}) = P(\{X = i + j\} \cap \{Y = j\}) \\ &= p(1-p)^{i+j-1}p(1-p)^{j-1} = p^2(1-p)^{i+2j-2}. \end{aligned}$$

Pour $i < 0$ et $j \in \mathbb{N}^\star$, on a, grâce à l'indépendance de X et Y,

$$\begin{aligned} P(\{(D, M) = (i, j)\}) &= P(\{D = i\} \cap \{M = j\}) = P(\{Y = j - i\} \cap \{X = j\}) \\ &= p(1-p)^{j-i-1}p(1-p)^{j-1} = p^2(1-p)^{2j-i-2}. \end{aligned}$$

Ceci montre que $P_{(D,M)} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star} p^2(1-p)^{2j+|i|-2}\delta_{(i,j)}$.

3. En utilisant la question 2 déduire que la loi de D est donnée par

$$\forall i \in \mathbb{Z},\ P(\{D = i\}) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}(1-p)^{|i|}.$$

Corrigé – *Soit $i \in \mathbb{Z}$. En utilisant la σ-additivité de P on a*

$$\begin{aligned} P(\{D = i\}) = \sum_{j \in \mathbb{N}^\star} P(\{(D, M) = (i, j)\}) &= \sum_{j \in \mathbb{N}^\star} p^2(1-p)^{2j+|i|-2} \\ &= p^2(1-p)^{|i|-2} \sum_{j \in \mathbb{N}^\star} (1-p)^{2j} = \frac{p^2(1-p)^{|i|}}{1-(1-p)^2} \end{aligned}$$

4. Montrer que les variables D et M sont indépendantes.

Corrigé – *Pour montrer que D et M sont indépendante, il suffit de vérifier que pour $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ on a $P(\{(D, M) = (i, j)\}) = P(\{D = i\})P(\{M = j\})$. En effet, comme $\delta_{(i,j)} = \delta_i \otimes \delta_j$, ceci donnera bien que $P_{(D,M)} = P_D \otimes P_M$.*
Soit $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ on a

$$\begin{aligned} &P(\{(D, M) = (i, j)\}) = p^2(1-p)^{2j+|i|-2}, \\ &P(\{D = i\}) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}(1-p)^{|i|} = \frac{p^2}{2p-p^2}(1-p)^{|i|}, \\ &P(\{M = j\}) = (1-p)^{2(j-1)}(2p-p^2). \end{aligned}$$

On obtient bien $P(\{(D, M) = (i, j)\}) = P(\{D = i\})P(\{M = j\})$.