Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, probabilités-Statistique
td 1, tribus, indépendance, loi de probabilités

Exercice 1.
Soit μ une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de fonction de répartition F. Exprimer $\mu(I)$ en fonction de F, pour les cas suivants : $I =]a; b]$; $I = [a; +\infty[$; $I = [a; b]$; $I =]a; b[$; $I = [a; b[$.

Exercice 2 (Densités de probabilité)**.**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive mesurable. On supposera que $\int f d\lambda = 1$.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$. Montrer que F est une fonction de répartition.
2. On appelle μ la mesure de probabilités de fonction de répartition F. Exprimer $\mu(A)$ en fonction de f, pour tout borélien A.
   On dit alors que la fonction f est la *densité* de la mesure μ.

Exercice 3 (Sur la continuité de la fonction de répartition)**.**
Soient p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et F la fonction de répartition de p. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que F est continue en a si et seulement si $p(\{a\}) = 0$. En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$ si p ne charge pas les points.

Exercice 4 (Lemme de Borel-Cantelli)**.**
Soient (E, T, p) un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T.
On pose

$$B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

(on rappelle que $A = \limsup_{n\to+\infty} A_n$).

1. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) < +\infty$ alors $p(A) = 0$.
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les évènements $A_0, \ldots, A_n$ sont indépendants.
   On suppose aussi que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) = +\infty$. Montrer que $p(A) = 1$.

Exercice 5 (Evènements indépendants et tribus indépendantes)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (Indépendance de 2 évènements) Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que A_1 et A_2 sont indépendants (c'est-à-dire $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$) si et seulement si les tribus $\sigma(\{A_1\})$ et $\sigma(\{A_2\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$ pour tout $B_1 \in \sigma(\{A_1\})$ et $B_2 \in \sigma(\{A_2\})$).
2. (Indépendance de n évènements, $n \geq 2$) Soit $n \geq 2$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que les évènements $A_1, \ldots, A_n$ vérifient la propriété

$$P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} P(A_i) \text{ pour tout } I \subset \{1, \ldots, n\}$$

   si et seulement si les tribus $\sigma(\{A_1\}), \ldots, \sigma(\{A_n\})$ sont indépendantes (c'est-à-dire $P(\bigcap_{i=1}^n B_i) = \prod_{i=1}^n P(B_i)$ pour tout $B_i \in \sigma(\{A_i\})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$).

3. En donnant un exemple (avec $n \geq 3$), montrer que l'on peut avoir n évènements, notés $A_1, \dots, A_n$, indépendants deux à deux, sans que les évènements $A_1, \dots, A_n$ soient indépendants.
4. Soit $A \in \mathcal{A}$.
   (a) On suppose que $A \in \mathcal{A}_1$ et $A \in \mathcal{A}_2$ et que $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus indépendantes (et contenues dans $\mathcal{A}$). Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$.
   (b) Montrer que $P(A) \in \{0, 1\}$ si et seulement si A est indépendant de tous les éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 6 (Médianes)**.**
Soit μ une mesure de probabilités sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On appelle *médiane* de μ tout réel m tel que

$$\mu([m, +\infty[) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mu(] - \infty, m]) \geq \frac{1}{2}\,.$$

On note F la fonction de répartition de μ.

1. Déterminer toutes les médianes de μ pour les cas suivants :
   (a) La loi de Bernoulli $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$,
   (b) la loi de Bernoulli $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1$,
   (c) la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
2. On note $t^* = \inf\{t\,;\, F(t) \geq \frac{1}{2}\}$. On souhaite démontrer que t^* est une médiane de μ.
   (a) Montrer que $F(t^*) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $\mu(] - \infty, t^*]) \geq \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que pour tout $t < t^*$, on a $\mu([t, +\infty[) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que t^* est une médiane pour μ.

Exercice 7 (Limites sup et inf d'ensembles)**.** *Soit* (E, T, p) *un espace probabilisé et* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T$. *On rappelle que*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} A_p \textit{ et } \liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geq n} A_p.$$

1. Montrer que

$$p(\liminf_{n\to+\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to+\infty} p(A_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} p(A_n) \leq p(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$

2. Donner un exemple pour lequel

$$p(\liminf_{n\to+\infty} A_n) < \liminf_{n\to+\infty} p(A_n) < \limsup_{n\to+\infty} p(A_n) < p(\limsup_{n\to+\infty} A_n).$$