Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, Probabilités-Statistique
td 2, variable aléatoire réelle (v.a.r.), loi d'une v.a.r.

Exercice 1 (Loi de probabilité de la v.a.r. nulle)
Soit (E, T, p) un espace probabilisé et X une v.a.r.. On suppose que $X = 0$ p.s.. Donner la loi de probabilité p_X de X.

Exercice 2 (tribu engendrée par une v.a.r. simple)
Soit (E, T, p) un espace probabilisé

1. Soit $A \in T$ et $X = 1_A$. Montrer que X est une v.a.r. et que $\sigma(X) = \sigma(A)$.
2. Soit $A, B \in T$, $X = 1_A$ et $Y = 1_B$. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si A et B sont indépendants.

Exercice 3 (De loi uniforme à loi donnée) Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et U une v.a.r. de loi $\mathcal{U}([0,1])$. A partir de U, on va construire une v.a.r. Y qui a même loi que X.
Soit F la fonction de répartition de X (*i.e.* $F(x) = P(X \le x)$ pour $x \in \mathbb{R}$).
Pour $u \in \mathbb{R}$, on définit $G(u)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} &G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \ge u\},\ \text{si } u \in]0,1[,\\ &G(u) = 0,\ \text{si } u \notin]0,1[. \end{aligned}$$

On pose $Y = G(U)$ (c'est-à-dire $Y(\omega) = G(U(\omega))$ pour tout $\omega \in E$).

1. Soit $u \in\ ]0,1[$, montrer que $\{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\} \neq \emptyset$, $\inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\} \in \mathbb{R}$ et
$$\{x \in \mathbb{R}; F(x) \ge u\} = [G(u), +\infty[.$$
2. Montrer que Y est une v.a.r..
3. Montrer que Y a la même loi que X. [On pourra montrer que $P(G(U) \le x) = P(U \le F(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.]

Exercice 4 (Composition de v.a.r.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On définit Z par

$$\forall \omega \in \Omega\,,\quad Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Montrer que Z est une variable aléatoire.

Exercice 5
Soit $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Un élément ω de Ω est donc une suite prenant ses valeurs dans ses valeurs dans $\{0,1\}$, c'est-à-dire que $\omega = (a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ avec $a_p = 0$ ou 1 pour tout p.
On pose $A = \{\omega = (a_p)_{p\in\mathbb{N}}\,;\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 1\}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\omega = (a_p)_{p\in\mathbb{N}}\,;\ a_n = 1\}$.
Comparer les ensembles A, $\limsup_{n\to+\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n$.

Exercice 6 (V.a.r. mesurable par rapport à une autre v.a.r.)
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si Y est de la forme $Y = f(X)$ où f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors Y est $\sigma(X)$-mesurable.
N.B. : La réciproque de ce résultat est vraie. On peut montrer que Y est mesurable par rapport à la tribu engendrée par X (notée $\sigma(X)$) si et seulement si il existe une fonction borélienne f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$ (c'est-à-dire, plus précisément, que $Y = f \circ X$).

Exercice 7 Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $\sigma(X, Y)$ la plus petite tribu pour laquelle X et Y sont mesurables.
Montrer que $\sigma(X, Y) \neq \sigma(X) \cup \sigma(Y)$ en général.

Exercice 8 (Probabilité conditionnelle, loi conditionnelle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit A un événement de probabilité non nulle. On définit la *probabilité conditionnelle sachant* A par la formule
$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \text{ pour tout } B \in \mathcal{A}.$$

1. Vérifier que $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$ est un nouvel espace probabilisé. Montrer que $P_A(A) = 1$.

Soit X une variable aléatoire réelle. La *loi conditionnelle de* X *sachant* A est la loi $(P_A)_X$ c'est-à-dire l'image de la mesure P_A par X.

2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $A = \{X \leq \frac{1}{2}\}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.

Exercice 9 Soit A un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ et μ une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(A) = 1$. Soit X une v.a. sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ de loi μ. Montrer que X coincide avec probabilité 1 avec une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices.

Exercice 10 (Convergence en probabilité d'une somme) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité et $Y_n \to Y$ en probabilité, quand $n \to +\infty$.
On pose $Z_n = X_n + Y_n$. Montrer que $Z_n \to X + Y$ en probabilité quand $n \to +\infty$.

Exercice 11 (Convergence en probabilité et fonctions continues) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r. On suppose que $X_n \to X$ en probabilité, quand $n \to +\infty$.

1. Soit φ une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en probabilité, quand $n \to +\infty$.
2. Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi(X_n) \to \varphi(X)$ en probabilité, quand $n \to +\infty$. [On pourra commencer par remarquer que $\lim_{a \to +\infty} p(\{|X| \geq a\}) = 0$.]