Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, Probabilités-Statistique
td 3, loi d'une v.a.r., espérance, variance, covariance

Exercice 1 (Fonctions constantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire (réelle). On suppose que la fonction de répartition de la loi de X ne prend que les valeurs 0 et 1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha$ p.s..

Exercice 2 (Espérance et variance de lois usuelles) Soient (E, T, p) un espace probabilisé et X une v.a.r. de loi de probabilité p_X. Calculer l'espérance et la variance de X dans les cas suivants :

1. p_X est la loi uniforme sur $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$),
2. p_X est la loi exponentielle de paramètre λ (loi de densité f avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$).
3. p_X est la loi de Gauss de paramètre (μ, σ) (loi de densité f avec $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$).

Exercice 3 (Calculs de lois) Soient (E, T, p) un espace probabilisé et X une v.a.r..

1. On suppose que la loi de X est la loi de densité f. Déterminer les lois des v.a.r. suivantes :
   $aX + b$ (avec a, $b \in \mathbb{R}$), $|X|$, $X + |X|$. Dans quels cas a-t-on une loi de densité ?
2. On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer les densités des lois de $\sqrt{X}$ et X^2.
3. On suppose que la loi de X est la loi exponentielle de densité f avec $f(t) = e^{-t} 1_{\mathbb{R}_+}(t)$. Déterminer les densités des lois de $\sqrt{X}$ et X^2.

Exercice 4 (Inégalité de Jensen) Rappel : Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ il existe $c_a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - f(a) \geq c_a(x - a)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit f une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une v.a.r. sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X et $f(X)$ sont intégrables. Démontrer l'**inégalité de Jensen**, c'est-à-dire $\int f(X)dP \geq f(\int X dP)$. [Utiliser le rappel avec a bien choisi.]

Exercice 5 (Sign(X) et $|X|$ pour une gaussienne) On définit la fonction signe par :

$$\text{sign} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}, \quad s \mapsto \text{sign}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0, \\ -1 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. gaussienne centrée (c'est-à-dire $P_X = f\lambda$ avec, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, où $\sigma > 0$ est la racine carré de la variance de X). Montrer que sign(X) et $|X|$ sont indépendantes et préciser leurs lois. Même question avec sign(X) et X^2.

Exercice 6 (V.a. gaussiennes dépendantes, à covariance nulle) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, S deux v.a. réelles, indépendantes, t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et S a pour loi $P_S = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. (Il est possible de construire un espace de probabilités et des v.a. indépendantes ayant des lois prescrites.)

1. Montrer que $SX \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
   [Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose $B = \{-x, x \in A\}$. Montrer que $P(\{X \in B\}) = P(\{X \in A\})$ et
   $$P(\{SX \in A\}) = P(\{S = 1\} \cap \{X \in A\}) + P(\{S = -1\} \cap \{X \in B\}).$$
   Conclure en utilisant l'indépendance de S et X.]
2. Montrer que SX et X sont dépendantes.
   [On pourra remarquer que l'indépendance de SX et X impliquerait $E(|SX||X|) = E(|SX|)E(|X|)$ et donc $E(X^2) = E(X)^2$.]
3. Montrer que Cov$(SX, X) = 0$.

Exercice 7 (Petit calcul) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. de de carré intégrable, de même loi et indépendantes. Montrer que la v.a.r. $X - Y$ est de carré intégrable et que $E[(X-Y)^2] = 2\text{Var}(X)$.

Exercice 8 (Limite p.s. et indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite v.a.r. et X, Y deux v.a.r.. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n et Y sont indépendantes et on suppose que $X_n \to X$ p.s., quand $n \to +\infty$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 9 (Exponentielle d'une v.a. gaussienne) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $Y = \exp(X)$. Calculer la densité de Y (si elle existe).

Exercice 10 (Loi du χ^2) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer l'espérance, la variance ainsi que la densité de la v.a.r. X^2. (Remarque : cette loi s'appelle loi du χ^2 à 1 degré de liberté.)

Exercice 11 (Coefficient de corrélation) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. centrée, de carré intégrable et telles que $\text{Var}(X)\text{Var}(Y) \neq 0$.

On pose $\rho(X,Y) = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}$ (c'est le *coefficient de corrélation* entre X et Y).

1. Montrer que $|\rho(X,Y)| \leq 1$. [Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.]
2. Montrer que si $|\rho(X,Y)| = 1$ alors il existe un réel a tel que $P(\{X = aY\}) = 1$.

Exercice 12 (Dés pipés) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes, bornées et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$E(t^{X+Y}) = E(t^X)E(t^Y).$$
2. On suppose maintenant que $\text{Im}(X) = \text{Im}(Y) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et que $P(\{X = i\}) = p_i > 0$, $P(\{Y = i\}) = q_i > 0$ pour $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

   On pose $P(\{X + Y = i\}) = r_i$ pour $i = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

   Montrer qu'il est impossible que r_i soit indépendant de i (c'est-à-dire $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12). [On pourra raisonner par l'absurde et montrer que si $r_i = 1/11$ pour tout i entre 2 et 12, on a alors $(1 - t^{11}) = 11(1-t)(\sum_{i=0}^{5} p_{i+1}t^i)(\sum_{i=0}^{5} q_{i+1}t^i)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible…]

Exercice 13 (Conséquence du lemme de Borel-Cantelli, exercice difficile) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de loi normale centrée réduite (c'est-à-dire que la loi de X_1 est la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $P(|X_n| > x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\exp(\frac{-x^2}{2})$.
2. Soit $a \geq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_{n,a} = \{|X_n| > a\sqrt{2\ln(n)}\}$ et $A_a = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} A_{k,a}$.

   Montrer les deux propriétés suivantes :

   (p1) $P(A_a) = 0$ si $a > 1$.

   (p2) $P(A_1) = 1$.

   [Utiliser le lemme de Borel-Cantelli, vu au td 1.]
3. Montrer que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|X_n|}{\sqrt{2\ln(n)}} = 1$ p.s..