

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, Probabilités-Statistique
td 4, convergence en loi, loi des grands nombres

Exercice 1 (Exemples de v.a.r. appartenant à L^q) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. (réelle). Dans les trois cas suivants, donner les valeurs de $q \in [1, \infty]$ pour lesquels la variable aléatoire X appartient à l'espace $L^q(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

1. X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) (c'est-à-dire que la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{]0, +\infty[}$ pour $x \in \mathbb{R}$).
2. X suit une loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ (la loi de X a une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, avec $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{x^2 + c^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$).
3. X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ ($p \in]0, 1[$) (c'est-à-dire que $P(\{X = k\}) = p(1 - p)^{k-1}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 2 (Orthogonalité et v.a.r. indépendantes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes. On suppose que X_n est de carré intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $(X_n | X_m)_2 = 0$ si $n \neq m$ (On note L^2 l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{A}, p)$ et $(\cdot | \cdot)_2$ le produit scalaire dans L^2). On suppose enfin que $\sum_{n=0}^{\infty} \text{Var}(X_n) < +\infty$.

1. Montrer qu'il existe au plus un entier $n \geq 0$ t.q. $E(X_n) \neq 0$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ est convergente dans L^2 .

Exercice 3 (Convergence en loi et fonction de répartition)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. et X une v.a.r.. On note m_n la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) et m la loi de X .

1. Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$. On suppose, dans cette question, que $P(\{X_n \leq a\}) \rightarrow P(\{X \leq a\})$, quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $a \in A$.
 - (a) Montrer que $m_n([a, b]) \rightarrow m([a, b])$, quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $a, b \in A$, $a < b$.
 - (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ et $a_0, \dots, a_p \in A$ t.q. $a_0 < \dots < a_p$. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i 1_{]a_{i-1}, a_i]}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi dm, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

- (c) Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.
 - (d) Dédire de la question précédente que $X_n \rightarrow X$ en loi, quand $n \rightarrow +\infty$.
2. On suppose, dans cette question, que $X_n \rightarrow X$ en loi, quand $n \rightarrow +\infty$. Pour $a \in \mathbb{R}$ on pose $F(a) = P(\{X \leq a\})$ (c'est donc la fonction de répartition de X). On note A l'ensemble des points de continuité de F .
 - (a) Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.
 - (b) En partant de la définition de convergence en loi (c'est-à-dire $E(\varphi(X_n)) \rightarrow E(\varphi(X))$ pour tout $\varphi \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$), montrer que $P(\{X_n \leq a\}) \rightarrow P(\{X \leq a\})$ pour tout $a \in A$.
 - (c) Donner un exemple pour lequel, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $P(\{X_n \leq a\}) \not\rightarrow P(\{X \leq a\})$, quand $n \rightarrow +\infty$ (alors que l'on a toujours $X_n \rightarrow X$ en loi, quand $n \rightarrow +\infty$).

Exercice 4 (Convergence en loi) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. réelle de loi uniforme sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $-X$ est une v.a. de même loi que X .
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de v.a. t.q. :
 - (a) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X ,
 - (b) $(X_n - X)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas en loi vers 0.
3. Donner un exemple de trois v.a.r. X, Y, Z t.q. X et Y aient la même loi, mais sans que XZ et YZ aient la même loi.

Exercice 5 (Convergence en loi + convergence en probabilité) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de v.a. réelles telles que :

$$X_n \rightarrow X \text{ en loi, } Y_n \rightarrow 0 \text{ en probabilité, quand } n \rightarrow +\infty.$$

Montrer que

$$X_n + Y_n \rightarrow X \text{ en loi, quand } n \rightarrow +\infty.$$

[On pourra utiliser la convergence vague.]

Exercice 6 (Convergence en loi versus convergence en probabilité)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a. réelle et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles.

1. On suppose, dans cette question, que $X_n \rightarrow X$ en probabilité, quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que :

$$X_n \rightarrow X \text{ en loi, quand } n \rightarrow +\infty.$$

[Remarquer qu'il suffit de démontrer une convergence vague de P_{X_n} vers P_X .]

2. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $X = a$ p.s.. On suppose aussi que $X_n \rightarrow X$ en loi, quand $n \rightarrow +\infty$. Montrer que :

$$X_n \rightarrow X \text{ en probabilité, quand } n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 7 (Estimateur sans biais de la variance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.i.d. de carré intégrable. Pour $n \geq 2$, on pose

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \quad Z_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - Y_n)^2.$$

1. On suppose, dans cette question, que $E(X_1) = 0$ (et donc $\text{Var}(X_1) = E(X_1^2)$).

(a) Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 \rightarrow \text{Var}(X_1)$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$ et que $E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2) = \text{Var}(X_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que l'on a aussi $Z_n \rightarrow \text{Var}(X_1)$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$ et $E(Z_n) = \text{Var}(X_1)$ pour tout $n \geq 2$.

[Utiliser la loi forte des grands nombres.]

On a donc ici deux estimateurs de la variance dit sans biais (à cause de l'égalité pour tout n sur l'espérance).

2. On suppose plus que $E(X_1) = 0$ et pose $m = E(X_1)$.

(a) Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m)^2 \rightarrow \text{Var}(X_1)$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$ et que $E(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - m)^2) = \text{Var}(X_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que l'on a aussi $Z_n \rightarrow \text{Var}(X_1)$ p.s. quand $n \rightarrow +\infty$ et $E(Z_n) = \text{Var}(X_1)$ pour tout $n \geq 2$.

Nous avons ainsi obtenu encore deux estimateurs sans biais de la variance de X_1 , mais le premier n'est intéressant que si m est connue *a priori*.

On rappelle aussi que la convergence p.s. implique la convergence en probabilité.