

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, probabilités-Statistique
td 6, v.a., indépendance, vecteurs gaussiens

Exercice 1 (Loi du couple de v.a.r.i ayant une densité) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X et Y ont des lois de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$). Montrer que le couple (X, Y) a une loi de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$) et donner cette densité en fonction des densités des lois de X et Y .

Exercice 2 (Retour sur le td 3...) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, S deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X a une loi de densité paire et que la loi de S est $P_S = 1/2\delta_1 + 1/2\delta_{-1}$. Montrer que X et SX ont même loi.

Exercice 3 (Covariance d'une somme de v.a.i.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X, Y deux vecteurs aléatoires indépendants de dimension d ($d \geq 1$). Montrer que $\text{Cov}(X + Y) = \text{Cov}(X) + \text{Cov}(Y)$.

Exercice 4 (V.a. suivant une loi normale multi-dimensionnelle)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_1, X_2)$ un v.a. de dimension 2. On suppose que les X_i sont des v.a.r. indépendantes et que $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, avec $m_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i > 0$ pour tout i . Montrer que X suit une loi normale multidimensionnelle et donner m et D t.q. $X \sim \mathcal{N}(m, D)$.

Exercice 5 (Somme de v.a. indépendantes et convolution)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes.

1. On suppose que la loi de X a une densité, notée f , par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la loi de $X + Y$ a aussi une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) et l'exprimer en fonction de f et de la loi de Y .
2. On suppose que $X \sim \mathcal{U}([0, 1])$ et $P_Y = (1/2)\delta_0 + (1/2)\delta_a$ (avec $a \in \mathbb{R}$ donné). Donner la loi de $X + Y$.

Exercice 6 (Loi du produit de la loi exponentielle par ± 1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. indépendantes. On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$), c'est-à-dire que P_X est une mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et cette densité est la fonction f définie par $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)1_{]0, +\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On suppose que Y est t. q. $P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = -1\}) = 1/2$. Donner la loi de XY .

Exercice 7 (Calcul de π)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires réelles de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On suppose que toutes ces v.a. sont indépendantes (dans leur ensemble). On pose pour tout $n \geq 1$:

$$X_n = 1 \text{ si } U_n^2 + V_n^2 \leq 1 \text{ et } X_n = 0 \text{ sinon,}$$

et

$$Z_n = 4 \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n .
2. Montrer que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers π .
 [On admettra que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. indépendantes et on pourra appliquer la loi faible des grands nombres.]
3. Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$. A l'aide de l'inégalité de Tchebychev, donner, en fonction de α et ε , une valeur de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ t.q.

$$n \geq n_0 \Rightarrow P[|Z_n - \pi| \geq \varepsilon] \leq \alpha.$$

[Reprendre la démonstration de la loi faible des grands nombres.]

Exercice 8 (Loi du couple (X, X) si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$)

Pour tout A borélien de $\mathbb{R}^2$, on pose $T(A) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x, x)^t \in A\}$.

1. Montrer que, pour tout A un borélien de $\mathbb{R}^2$, $T(A)$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Pour tout A borélien de $\mathbb{R}^2$, on pose $m(A) = \lambda(T(A))$ (où λ est mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

On a ainsi défini une application m de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

2. Montrer que l'application m est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ et que pour toute application φ borélienne positive de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) dm(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, x) dx.$$

3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. et X une v.a.r. t.q. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

(a) On pose $Z = (X, X)^t$. Montrer que le v.a. Z est un vecteur gaussien et donner, pour $a \in \mathbb{R}^2$, la loi de $a \cdot Z$ (en fonction de a).

(b) Montrer la loi du v.a. $(X, X)^t$ a une densité par rapport à la mesure m définie dans les questions précédentes et donner cette densité. En déduire que la loi du v.a. $(X, X)^t$ n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

N.B. La loi de $(X, X)^t$ est une loi normale bidimensionnelle car le vecteur $(X, X)^t$ est gaussien (voir les notes de cours) mais ce n'est pas une loi de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.