

Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3ème année, probabilités-Statistique
td 7, fonction caractéristique, théorème central limite

Exercice 1 (Somme de v.a.r.i. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de la somme $X + Y$.

Exercice 2 (Série pondérée de v.a.r.i.d. de loi de Bernoulli)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Pour $m \geq 1$, on pose $Z_m = \sum_{n=1}^m 2^{-n} \epsilon_n$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \epsilon_n$ converge p.s..

Pour $\omega \in \Omega$, on pose $Z(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \epsilon_n(\omega)$ si la série est convergente et 0 sinon. (Noter que Z est bien une v.a.r..) On note φ_m (resp. φ) la fonction caractéristique de la loi de Z_m (resp. Z).

2. Montrer que $\varphi_m(t) \rightarrow \varphi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer la fonction caractéristique de Z_m . En déduire la valeur de φ .

4. Déterminer la loi de Z .

Exercice 3 (Calcul de fonctions caractéristiques) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. réelle. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X dans les cas suivants :

1. $X = a$ p.s. ($a \in \mathbb{R}$).

2. $X \sim \mathcal{B}(p)$ (loi de Bernoulli de paramètre $p : P(\{X = 1\}) = p = 1 - P(\{X = 0\})$).

3. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Exercice 4 (Vecteurs gaussiens et densité) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_1, X_2)$ un v.a. de dimension 2. On suppose que X est un vecteur gaussien (c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^2 a_i X_i$ suit une loi gaussienne pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$). On note m la moyenne de X et D la matrice de covariance de X . Montrer que la loi de X est de densité par rapport à la mesure de Lebesgue (sur $\mathbb{R}^2$) si et seulement si D est inversible.

Exercice 5 (V.a. gaussiens, indépendance, covariance)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et $X = (X_1, X_2)$ un v.a. de dimension 2.

1. On suppose que X_1 et X_2 suivent des lois gaussiennes et sont indépendantes, montrer que X est un vecteur gaussien et que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

2. On suppose que X est un vecteur gaussien et que $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.

3. Donner un exemple pour lequel X_1 et X_2 sont gaussiennes mais X n'est pas un vecteur gaussien. [On pourra, par exemple, choisir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et X_1, X_2 de manière à avoir $\text{Cov}(X_1, X_2) = 0$ sans que X_1, X_2 soient indépendantes, voir l'exercice 6 du td3.]

Exercice 6 (Suite de v.a.r.i.d. de Poisson) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a. de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$). On rappelle que, $P(\{X = k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et que $E(X) = \lambda$, $\text{Var}(X) = \lambda$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X de X .

2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et de Poisson de paramètre λ .

(a) Soit $n > 1$. Déduire de la question 1 la loi de la v.a. $Y_n = \sum_{p=1}^n X_p$.

(b) Utiliser le théorème central limite pour démontrer que $e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 7 (Sur la loi d'un vecteur aléatoire) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X un v.a. de dimension d . Montrer que la loi de X est uniquement déterminée par la donnée des lois de toutes les v.a.r. $a \cdot X$, $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| = 1$. [On pourra utiliser la fonction caractéristique de X .]

Exercice 8 (Limite en loi de Gaussiennes) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une v.a.r. et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. gaussiennes. On suppose que X_n tend en loi vers X , quand $n \rightarrow +\infty$. On note m_n l'espérance de X_n et σ_n^2 la variance de X_n (avec $\sigma_n \geq 0$). Si $\sigma_n > 0$, la v.a.r. X_n a donc pour loi une loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(x-m_n)^2}{2\sigma_n^2}} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

Si $\sigma_n = 0$, la loi de X_n est δ_{m_n} .

Si Z est une v.a.r., on note φ_Z la fonction caractéristique de Z (on rappelle que φ_Z est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et que $\varphi_Z(0) = 1$). On rappelle que la fonction caractéristique de X_n est

$$\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} e^{im_nt} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

1. Soit Z une v.a.r.. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}^* \text{ t.q. } |\varphi_Z(t)| > 0$.
2. Montrer que la suite $(\sigma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathbb{R}$. [On pourra utiliser la convergence de $|\varphi_{X_n}(t)|$ vers $|\varphi_X(t)|$ pour t bien choisi.]
3. Calculer $P(\{X_n \geq m_n\})$ et $P(\{X_n \leq m_n\})$ et en déduire que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. [On pourra utiliser le fait que la suite $(P_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue.]
4. Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. En déduire que X est une v.a.r. gaussienne.

Exercice 9 (Sur les lois des grands nombres, exercice difficile) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. dont la loi est la loi de Cauchy c'est-à-dire que $P_X = f\lambda$, avec $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$ (on rappelle que λ désigne la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$).

1. Montrer que X n'est pas une v.a.r. intégrable.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(\{|X| > n\}) \geq \frac{1}{n\pi}$, où $\{|X| > n\} = \{\omega \in \Omega, |X(\omega)| > n\}$. [On pourra remarquer que $\frac{2}{1+x^2} \geq \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$.]
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = e^{-|x|}$. Montrer que $\frac{2}{1+u^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} g(x) dx = \sqrt{2\pi} \hat{g}(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. En déduire que la fonction caractéristique de X , notée φ_X vérifie $\varphi_X(u) = e^{-|u|}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. [On pourra utiliser de théorème d'inversion de Fourier qui donne $\hat{\hat{g}} = g(-\cdot)$ p.p. si $g, \hat{g} \in L^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.]

On se donne maintenant une suite $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ de v.a.r.i.i.d. et on suppose que la loi de X_1 (et donc de tous les X_n) est la loi de Cauchy. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \frac{1}{n}(\sum_{p=1}^n X_p)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\varphi_{Z_n}(u) = \varphi_{X_1}^n(\frac{u}{n})$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Donner la loi de Z_n .
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \{|X_n| > n\}$ et $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p$. On pose aussi $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$.
 - (a) Montrer que $P(B) = 1$. [On pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli et la question 2.]
 - (b) Soit $\omega \in B$. Montrer que $\frac{X_n(\omega)}{n} \not\rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.
 - (c) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer que si la suite $(Z_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n(\omega)}{n} = 0$. [Écrire X_n en fonction de Z_n et Z_{n-1} .]
 - (d) Déduire des trois questions précédentes que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas p.s. vers une limite finie.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $Z_{2n} - Z_n = \frac{U_n + V_n}{2}$, où U_n et V_n sont deux v.a.r. indépendantes, de loi de Cauchy. En déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité.
7. Pour quelles raisons ne peut-on appliquer, à la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, les lois forte et faible des grands nombres ?