Université de Marseille
Licence de Mathématiques, 3eme année, probabilités-Statistique
td 8, Espérance conditionnelle

Exercice 1 (Espérance conditionnellement à une tribu) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et Y une variable aléatoire réelle intégrable. Dans les trois cas suivants, montrer que $E(Y|\mathcal{B})$ est réduit à un élément et déterminer $E(Y|\mathcal{B})$ (en fonction de Y et $\mathcal{B}$).

1. La tribu $\mathcal{B}$ la tribu grossière, c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$.
2. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $0 < P(B) < 1$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par B.
3. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \subset \mathcal{A}$ t.q. $B_n \cap B_m = \emptyset$ si $n \neq m$, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} B_n$ et $0 < P(B_n) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\bigcup_{n\in J} B_n,\ J \subset \mathbb{N}^*\}$).

Exercice 2 (Espérance conditionnellement à une tribu (2)) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. intégrable.

1. Soit $B \in \mathcal{A}$ t.q. $P(B) = 1$ et $B^c \neq \emptyset$ (c'est le cas, par exemple, si P est une mesure diffuse, que $\mathcal{A}$ contient les singletons et que B^c est formé d'un nombre fini ou dénombrable de points de Ω). On pose $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose
$$Z_a = E(X)1_B + a1_{B^c}.$$
Montrer que $E(X|\mathcal{B})$ est l'ensemble des v.a.r. Z_a avec $a \in \mathbb{R}$ (en pratique, comme on confond $E(X|\mathcal{B})$ avec l'un de ses représentants, on peut écrire $E(X|\mathcal{B}) = Z_a$ p.s. avec n'importe quel a dans $\mathbb{R}$, et donc, par exemple, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ p.s..)
2. Soit I un ensemble fini ou dénombrable, $(B_n)_{n\in I}$ une famille de sous tribus de $\mathcal{A}$ telle que
$$B_n \cap B_m = \emptyset \text{ si } n \neq m\ \Omega = \bigcup_{n\in I} B_n.$$
On prend pour $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par $(B_n)_{n\in I}$ (c'est-à-dire $\mathcal{B} = \{\bigcup_{n\in J} B_n,\ J \subset I$). Montrer que
$$E(X|\mathcal{B}) = \sum_{n\in J} \frac{\int_{B_n} X dP}{P(B_n)} 1_{B_n} \text{ p.s.,}$$
où $J = \{n \in I, \text{t.q. } P(B_n) > 0\}$.

Exercice 3 (Espérance conditionnellement à une v.a.r.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire réelle et Y une variable aléatoire réelle intégrable.

1. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ t.q. $X = a$ p.s.. Donner un élément de $E(Y|X)$.
2. On suppose que X prend p.s. deux valeurs x_1 ou x_2 avec $x_1 \neq x_2$. Donner un élément de $E(Y|X)$.
3. On suppose que X est une v.a. prenant p.s. ses valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n, n \in \mathbb{N}^\star\}$ avec $P(X = x_n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner un élément de $E(Y|X)$.

Exercice 4 (Égalité d'espérances conditionnelles) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{B}$ une sous–tribu de $\mathcal{A}$, X une v.a.r. intégrable et V une v.a.r. $\mathcal{B}$-mesurable bornée. Montrer que $E(XV|\mathcal{B}) = E(X|\mathcal{B})V$ p.s..

Exercice 5 (Espérance conditionnelle et indépendance) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et X une v.a.r. intégrable.

1. Soit Y une v.a.r. indépendante de X. Montrer que $E(X|Y) = E(X)$ p.s..
2. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On suppose que $\sigma(X)$ et $\mathcal{B}$ sont des tribus indépendantes. Montrer que $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$ p.s..

Exercice 6 (Espérance conditionnelle d'une v.a.r. appartenant à $\mathcal{L}^p$)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $\mathcal{G}$ une sous–tribu de $\mathcal{A}$ et Y une v.a.r. intégrable. On pose $Z = E(Y|\mathcal{G})$ (plus précisément, on confond ici, comme d'habitude, la classe $E(Y|\mathcal{G})$ avec l'un de ses éléments).

1. On suppose, dans cette question, qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ t.q. $|Y| \leq M$ p.s.. Montrer que $|Z| \leq M$ p.s.. et que $E(Z\Phi) = E(Y\Phi)$ pour tout Φ $\mathcal{G}-$mesurable et intégrable.
2. Soit $p \in]1, \infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. On suppose que $|Y|^p$ est intégrable, montrer que $|Z|^p$ est intégrable et que $E(Z\Phi) = E(Y\Phi)$ pour tout Φ $\mathcal{G}-$mesurable et t.q. $|\Phi|^q$ soit intégrable.

Exercice 7 (Calcul de $E(\exp(XY)|X)$ si $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a. réelles indépendantes. On suppose que Y suit une loi gaussienne centrée réduite et que $E(\exp(X^2/2)) < \infty$. Montrer que $\exp(XY)$ est intégrable et déterminer $E(\exp(XY)|X)$.

Exercice 8 (Espérance selon une somme de v.a.r.i.i.d) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X et Y deux v.a.r. intégrables. Montrer que $E(X|X+Y)+E(Y|X+Y) = X+Y$ p.s.. On suppose maintenant que X et Y sont indépendantes et de même loi. Montrer que
$$E(X|X+Y) = E(Y|X+Y) = \frac{X+Y}{2} \text{ p.s..}$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. indépendantes, de même loi et intégrables. On note
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
Montrer que $E(X_1|S_n) = S_n/n$ p.s..

Exercice 9 (Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $X = Y$ p.s.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a.r. intégrables. On suppose que
$$E(X|Y) = Y \text{ p.s. et } E(Y|X) = X \text{ p.s..}$$

1. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$E\left((X-Y)1_{\{X>c, Y>c\}}\right) = E\left((Y-X)1_{\{X>c\geq Y\}}\right) \leq 0.$$
En déduire que $E\left((X-Y)1_{\{X>c, Y>c\}}\right) = 0$, puis que $P(\{X > c \geq Y\}) = 0$.
2. Montrer que $X = Y$ p.s..
3. on suppose maintenant que X et Y sont de carré intégrables. Montrer qu'une démonstration (beaucoup) plus directe de la question 2 est possible en calculant $E((X-Y)^2)$.
N.B. Le cas où X et Y sont seulement intégrables (traité dans les questions 1 et 2) peut aussi se faire avec la question 3 en tronquant les v.a.r. X et Y.

Exercice 10 (Espérance du produit et produit des espérances) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y deux v.a. intégrables t.q. XY est intégrable et $E(X|Y) = E(X)$ p.s.. Montrer que $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Exercice 11 (Égalité de lois donne égalité d'espérances conditionnelles) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X, Y, Z trois v.a.r.. On suppose que X et Y sont intégrables et que $(X, Z) \sim (Y, Z)$.

1. Montrer que $E(X|Z) = E(Y|Z)$ p.s..
2. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(X)$ et $f(Y)$ sont intégrables. Montrer que $E[f(X)|Z] = E[f(Y)|Z]$ p.s..