Proposition 9.33 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace probabilisé,* $d \geq 1$ *et* X *un v.a. de dimension* d.

1. *Soit* $m \in \mathbb{R}^d$ *et* D *une matrice s.d.p. (de taille* $d \times d$*). Si* $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \mathrm{D})$*, où* $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ *est définie par la définition 9.5, alors* X *est un vecteur gaussien,* $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = m$ *et* $Cov(\mathrm{X}) = \mathrm{D}$.
2. *Si* X *est un vecteur gaussien, on pose* $m = \mathrm{E}(\mathrm{X})$ *et* $\mathrm{D} = Cov(\mathrm{X})$*. Alors, la loi de* X *ne dépend que de* m *et* D*. Si* D *est inversible on a* $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ *(où* $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ *est définie par la définition 9.5).*

Ceci permet de définir $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ *dans le cas où* D *est seulement symétrique semi–définie positive (et* $m \in \mathbb{R}^d$*). On définit* $\mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ *comme étant la loi d'un vecteur gaussien de dimension* d *t.q.* $m = \mathrm{E}(\mathrm{X})$ *et* $\mathrm{D} = Cov(\mathrm{X})$ *(on peut montrer qu'un tel vecteur existe).*

DÉMONSTRATION –

1. Démonstration du premier item.

   On suppose que $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \mathrm{D})$ avec $m \in \mathbb{R}^d$ et D une matrice s.d.p.. Comme D est une matrice s.d.p., il existe une matrice diagonale M dont les termes diagonaux sont strictement positifs (ce sont les valeurs propres de M) et une matrice orthogonale P (c'est-à-dire que $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^t$) telles que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^t\mathrm{MP}$. On note N la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines des termes diagonaux de M, de sorte que $\mathrm{N}^2 = \mathrm{M}$, $\mathrm{D} = \mathrm{P}^t\mathrm{NNP}$ et donc, en notant $\bar{\mathrm{N}} = \mathrm{N}^{-1}$, $\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{P}^t\bar{\mathrm{N}}\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P} = (\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P})^t\bar{\mathrm{N}}\mathrm{P}$. On remarque aussi que $\det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{M})$ et donc $\det(\mathrm{N}) = \sqrt{\det(\mathrm{D})}$.

   On montre tout d'abord que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = m$. On a
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\mathrm{D})}} \int_{\mathbb{R}^d} x e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t\mathrm{D}^{-1}(x-m)} dx,$$
   ce qui donne, avec le changement de variable $x - m = \mathrm{P}^t\mathrm{N}y$, dont le jacobien est $\det(\mathrm{N})$ (c'est-à-dire $\sqrt{\det(\mathrm{D})}$),
   $$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{P}^t\mathrm{N}y e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy + \frac{m}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy.$$
   En notant $y_1, \ldots, y_d$ les composantes de y, on a $y^t y = \sum_{i=1}^d y_i^2$ et donc
   $$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy = \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y_i^2} dy_i = (2\pi)^{d/2}$$
   et, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, $\int_{\mathbb{R}} y_i e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy_i = 0$, ce qui donne, par linéarité de l'intégrale,
   $$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{P}^t\mathrm{N}y e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy = \mathrm{P}^t\mathrm{N} \int_{\mathbb{R}^d} y e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy = 0.$$
   On obtient bien finalement $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = m$.

   On montre maintenant que $\mathrm{D} = \mathrm{Cov}(\mathrm{X})$. Le simple fait que X soit un vecteur aléatoire de dimension d tel que $\mathrm{E}(|\mathrm{X}|^2) < +\infty$ nous donne que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$\mathrm{Var}(u\cdot X) = u^t\mathrm{Cov}(X)u$ (voir l'exercice 9.5). Comme D et Cov(X) sont des matrices symétriques, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Var}(u \cdot X) = u^t D u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ pour conclure que $D = \mathrm{Cov}(X)$.
Soit $u \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\mathrm{Var}(u \cdot X) = \mathrm{Var}((X - m) \cdot u) = E(u^t(x - m)(x - m)^t u) =$$
$$u^t\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(D)}}(x - m)(x - m)^t e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t D^{-1}(x-m)} dx\Big)u. \quad (9.4)$$

Avec le changement de variable $x - m = P^t N y$ on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\sqrt{\det(D)}}(x - m)(x - m)^t e^{-\frac{1}{2}(x-m)^t D^{-1}(x-m)} dx = P^t N\Big(\int_{\mathbb{R}^d} y y^t e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy\Big)NP.$$

Pour $i \neq j$, on a $\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy = 0$ et, pour $i = j$, $\int_{\mathbb{R}^d} y_i^2 e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy = (2\pi)^{d/2}$. On en déduit, en notant I_d la matrice identité de taille $d \times d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} y y^t e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy = (2\pi)^{d/2} I_d,$$

et donc, en revenant à 9.4, $\mathrm{Var}(u \cdot X) = u^t P^t NNP = u^t D u$. Ce qui prouve bien que $D = \mathrm{Cov}(X)$.

Il reste à montrer que X est un vecteur gaussien, c'est-à-dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, $u \cdot X$ est une v.a.r. gaussienne, ce qui est équivalent à montrer que $u \cdot (X - m)$ est une v.a.r. gaussienne centrée. Le cas $u = 0$ est immédiat (on obtient la loi $\mathcal{N}(0, 0)$). On peut donc se limiter à $u \neq 0$ et même u tel que $|u| = 1$ (car si Z est un v.a.r. gaussienne centrée, αZ est encore une v.a.r. gaussienne centrée pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).
Soit donc $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $|u| = 1$. On va montrer que $u \cdot (X - m)$ est une v.a.r. gaussienne centrée.
Soit φ une fonction borélienne bornée positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a, en utilisant le changement de variables $(x - m) = y$,

$$E(\varphi(u \cdot (X - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(D)}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(u \cdot y) e^{-\frac{1}{2}y^t D^{-1} y} dy.$$

Comme $|u| = 1$, on peut choisir une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ pour laquelle u est le premier vecteur. Il existe alors une matrice orthogonale Q (appelée matrice de passage, elle est formée par les vecteurs de cette nouvelle base) telle que, pour tout $y \in R^d$, $y = Qz$ avec $z_1 = u \cdot y$. Le changement de variables $y = Qz$ donne alors dans la formule précédente, en notant que $|\det(Q)| = 1$ et en posant $\bar{D} = Q^t D^{-1} Q$,

$$E(\varphi(u \cdot (X - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(D)}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z_1) e^{-\frac{1}{2}z^t \bar{D} z} dz.$$

La matrice $\bar{D}$ est encore une matrice s.d.p.. On peut utiliser sa décomposition de Cholesky (plus exactement la décomposition de Cholesky obtenue en changeant l'ordre des inconnues). Il existe une matrice inversible triangulaire inférieure, notée L, telle que $\bar{D} = L^t L$. Les coefficients diagonaux de L sont strictement positifs et $\det(L) = \sqrt{\det(\bar{D})} = 1/\sqrt{\det(D)}$. Le changement de variables $y = Lz$ donne alors, en notant α le terme de L en première ligne et première colonne,

$$E(\varphi(u \cdot (X - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\frac{y_1}{\alpha}) e^{-\frac{1}{2}y^t y} dy.$$

Enfin, en intégrant (grâce au théorème de Fubini-Tonelli) d'abord par rapport à $y_2, \ldots, y_n$ et en utilisant le changement de variable $y_1 = \alpha x_1$, on obtient

$$\mathrm{E}(\varphi(u \cdot (\mathrm{X} - m)) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} \alpha\varphi(x_1) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x_1^2} dx_1.$$

Ceci qui prouve que $u \cdot (\mathrm{X} - m) \sim \mathcal{N}(0, \alpha^{-2})$ et termine la démonstration du premier item.

2. Démonstration du deuxième item. On suppose que X est un vecteur gaussien et on pose $m = \mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{Cov}(\mathrm{X})$. On montrera dans la proposition 10.23 que la loi de X ne dépend que de m et D. (On admet ce résultat ici.)

   Si D est inversible (et donc D est s.d.p.), soit Y un v.a. de dimension d tel que $\mathrm{Y} \sim \mathcal{N}(m, \mathrm{D})$. D'après le premier item de cette proposition, Y est un vecteur gaussien, $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = m$ et $\mathrm{Cov}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D}$. comme la loi d'un vecteur gaussien ne dépend que de son espérance et de sa covariance, les vecteurs gaussiens X et Y ont même loi. On a donc $\mathrm{X} \sim \mathcal{N}(m, \mathrm{D})$

■