

**TP 1, Discrétisation de problèmes elliptiques linéaires 1d**

On souhaite, dans ce TP, comparer différentes discrétisations d'un problème (stationnaire) de diffusion-convection-réaction linéaire à une dimension d'espace.

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \geq 0$ ,  $c, d \in \mathbb{R}$  et  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . On cherche à approcher la solution  $u$  du problème suivant :

$$-\varepsilon u_{xx}(x) + au_x(x) + bu(x) = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

$$u(0) = c, \quad u(1) = d. \quad (2)$$

Le problème (1)-(2) admet une solution unique  $u \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ . On peut remarquer que cette solution est positive si  $c$ ,  $d$  et  $f$  sont positives (cette propriété est importante pour de nombreuses applications). On cherche à calculer (de manière approchée) cette solution.

## 1 Discrétisation par DF-centrées et EF

Ecrire la discrétisation de (1)-(2) par différences finies centrées (ou par éléments finis P1, le résultat sera le même) avec un maillage uniforme de pas  $h = 1/(N + 1)$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ). Les inconnues discrètes, notées  $u_1, \dots, u_N$ , sont donc supposées approcher les valeurs de  $u$  aux points  $x_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Ecrire un programme Scilab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode (en norme  $L^2$  ou  $L^\infty$ ) sur des exemples simples (l'ordre doit être égal à 2). On pourra choisir les exemples suivants :

1.  $\varepsilon = 1$ ,  $a = b = c = d = 0$ ,  $f(x) = -12x^2 + 12x - 2$  (la solution doit être  $u(x) = x^2(1 - x)^2$ ),

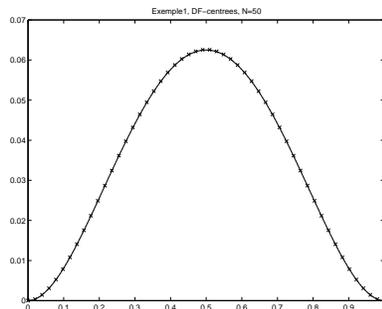


Figure 1: **Exemple 1, DF-c, N=50, x=solution approchée**

2.  $\varepsilon = 1/4$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $d = \exp(-2)$ ,  $f = 0$  (la solution doit être  $u(x) = \exp(-2x)$ ),
3.  $\varepsilon = 1/100$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ ,  $d = 1$ ,  $f = 0$  (calculer  $u \dots$ ).

**Commentaire :** Pour ces 3 exemples, la convergence est bien d'ordre 2 (en prenant, par exemple,  $N$  entre 50 et 400).

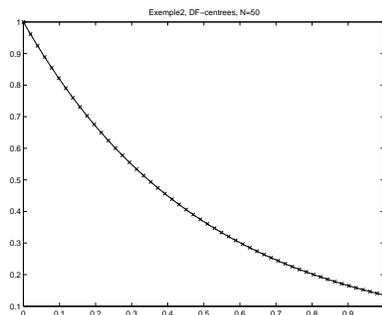


Figure 2: Exemple 2, DF-c, N=50, x=solution approchée

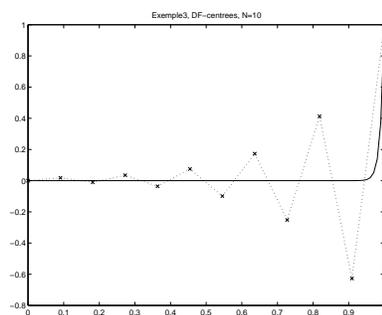


Figure 3: Exemple 3, DF-c, N=10, x=solution approchée

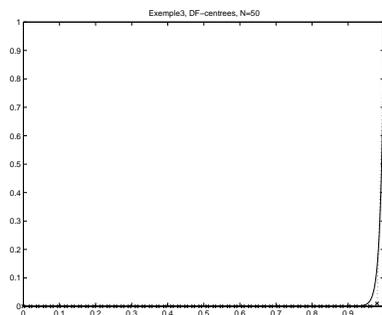


Figure 4: Exemple 3, DF-c, N=50, x=solution approchée

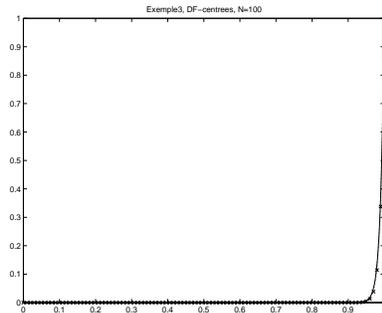


Figure 5: **Exemple 3, DF-c, N=100, x=solution approchée**

## 2 Discrétisation par VF-centrés

Reprendre les mêmes questions que ci dessus en discrétisant (1)-(2) par volumes finis centrés avec un maillage uniforme de pas  $h = 1/N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ). Les inconnues discrètes, toujours notées  $u_1, \dots, u_N$ , sont donc supposées approcher les valeurs de  $u$  aux points  $x_i = ih - h/2$ ,  $i = 1, \dots, N$  (l'ordre de convergence doit aussi être égal à 2).

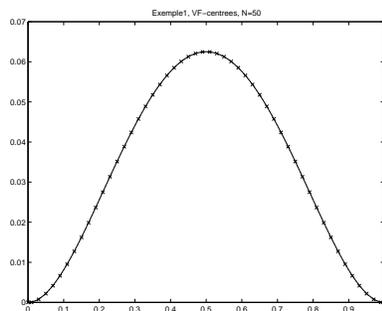


Figure 6: **Exemple 1, VF-c, N=50, x=solution approchée**

**Commentaire :** Pour les 3 exemples, la convergence est bien d'ordre 2 (en prenant, par exemple,  $N$  entre 50 et 400). Pour le 3eme exemple, les nombres manipulés, comme  $\exp(100)$ , sont très grands ou très petits, l'ordre est probablement un peu moins précisément calculé, les ordres obtenus pour les normes  $L^2$  et  $L^\infty$  sont environ 1.86 et 1.96 vers  $N = 400$ . On remarque aussi que les erreurs sont voisines entre VF et DF (pour l'exemple 1, les 2 erreurs sont égales à  $1.4710^{-6}$  pour  $N = 400$  pour l'exemple 1.)

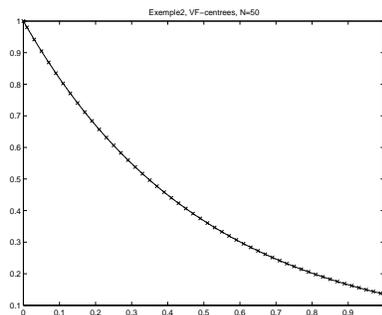


Figure 7: **Exemple 2, VF-c, N=50, x=solution approchée**

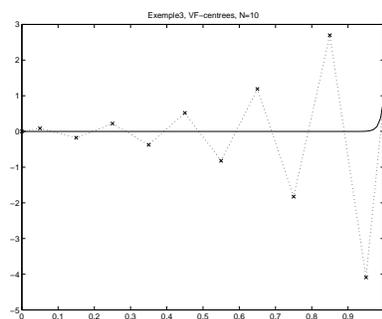


Figure 8: **Exemple 3, VF-c, N=10, x=solution approchée**

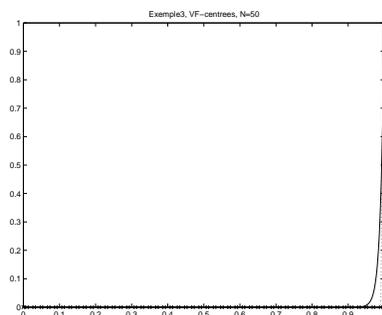


Figure 9: **Exemple 3, VF-c, N=50, x=solution approchée**

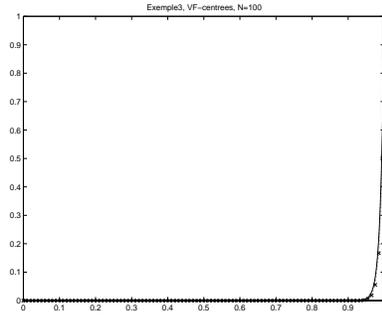


Figure 10: **Exemple 3, VF-c, N=100, x=solution approchée**

### 3 Discrétisation par VF-décentrés

Dans le troisième exemple décrit ci-dessus, on remarque que la solution n'est qualitativement pas satisfaisante si  $h$  est "grand" par rapport à  $\varepsilon$  (en fait, si  $h > (2\varepsilon)/a$ ). On perd, par exemple, la positivité de la solution approchée (la solution exacte est positive). Il est intéressant aussi de répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la limite, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de la solution de (1)-(2) avec  $a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, f = 0$  ? (pour  $\varepsilon$  petit par rapport à  $h$ , on dit que la solution présente une "couche limite" en  $x = 1$ .)
2. Quelle est la solution du schéma obtenu par différence finies centrées (par exemple) si  $\varepsilon = 0, a = 1, b = 0, c = 0, d = 1, f = 0$  (distinguer les cas  $N$  pair et  $N$  impair) ?

Pour obtenir une solution satisfaisante pour tout maillage (mais moins précise pour  $h$  "petit"), on va maintenant décentrer la discrétisation du terme de convection (c'est-à-dire  $au_x$ ). Ecrire la discrétisation de (1)-(2) ainsi obtenue par volumes finis (décentrés pour le terme de convection) avec un maillage uniforme de pas  $h = 1/N$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ). Les inconnues discrètes sont donc toujours supposées approcher les valeurs de  $u$  aux points  $x_i = ih - h/2, i = 1, \dots, N$ .

Ecrire un programme Scilab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode sur les mêmes exemples simples (sauf celui pour lequel  $a = 0 \dots$ ) que précédemment (l'ordre doit être égal à 1) .

**Commentaire :** Pour l'exemple 2, l'ordre de convergence obtenu est légèrement supérieur à 0.98 pour  $N$  de l'ordre de 400. Pour l'exemple 3, on trouve environ 0.87 (sauf erreur de calcul...) pour la norme 2, pour  $N$  de l'ordre de 400.

Le but de la suite est de trouver une méthode donnant une solution satisfaisante pour tout maillage et un ordre de convergence égal à 2...

### 4 Discrétisation par VF-décentrés d'ordre 2, sans limiteurs

On suppose  $a > 0$ . La discrétisation par VF-décentrés a consisté, pour le calcul du terme de convection, à approcher la valeur de  $u(x_{i+1/2})$  (avec  $x_{i+1/2} = ih$ ) par  $u_i$ , si  $i = 1, \dots, N$  (et  $u(0)$  par  $c$ ).

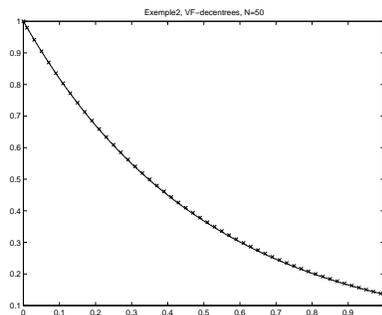


Figure 11: **Exemple 2, VF-d, N=50,  $x$ =solution approchée**

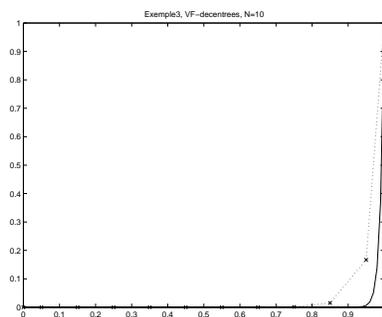


Figure 12: **Exemple 3, VF-d, N=10,  $x$ =solution approchée**

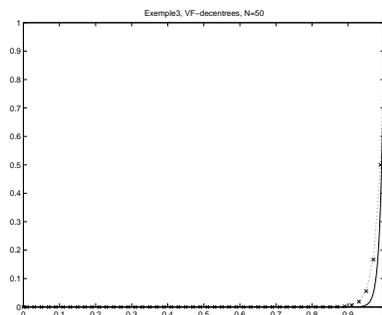


Figure 13: **Exemple 3, VF-d, N=50,  $x$ =solution approchée**

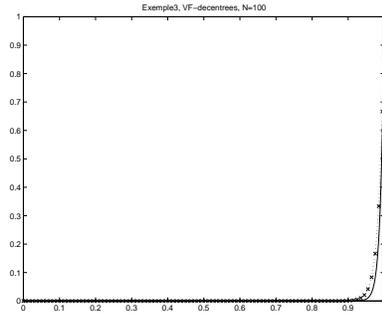


Figure 14: **Exemple 3, VF-d, N=100, x=solution approchée**

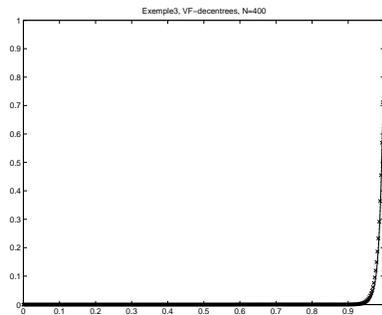


Figure 15: **Exemple 3, VF-d, N=400, x=solution approchée**

Pour obtenir un schéma plus précis (et toujours décentré), on introduit  $p_i = (u_{i+1} - u_{i-1})/2h$  pour  $i = 2, \dots, N - 1$  et, pour simplifier, on prend  $p_1 = p_N = 0$ . On discrétise alors le terme de convection en approchant la valeur de  $u(x_{i+1/2})$  par  $u_i + (h/2)p_i$ , si  $i = 1, \dots, N$  (et  $u(0)$  par  $c$ ).

Ecrire un programme Scilab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode sur le troisième exemple de la première question. Regarder aussi l'allure de la solution approchée pour  $h$  "grand".

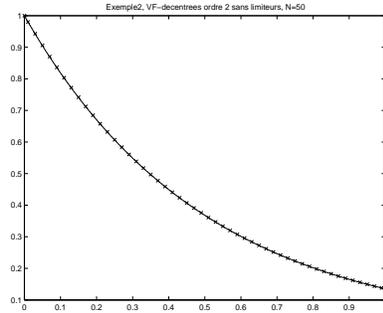


Figure 16: Exemple 2, VF-d/ordre 2/sans limiteurs, N=50, x=solution approchée

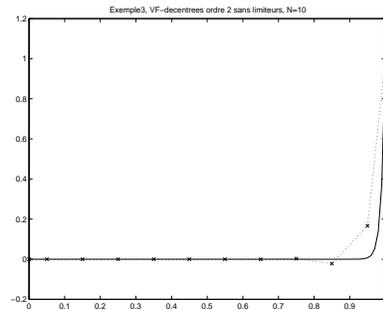


Figure 17: Exemple 3, VF-d/ordre 2/sans limiteurs, N=10, x=solution approchée

**Commentaire :** Pour les exemples 2 et 3, on retrouve un ordre de convergence voisin de 2 (probablement égal à 2 quand  $N \rightarrow \infty$ ). Pour l'exemple 2, l'ordre est supérieur à 1.97 pour  $N$  de l'ordre de 400. Pour l'exemple 3, l'ordre est environ 1.7 pour  $N$  de l'ordre de 400 (toujours pour les normes 2 et  $\infty$ ). On remarque aussi que, pour des petites valeurs de  $N$  (voir les résultats pour  $N = 10$ , par exemple), la solution approchée peut prendre des valeurs négatives dans l'exemple 3. Ceci peut être ennuyeux et c'est la raison de la modification suggérée à la question suivante (introduction des "limiteurs"). On peut également légèrement "améliorer" le schéma en mettant des "pentes" dans les mailles 1 et  $N$ . Un choix possible est de prendre  $p_1 = (u_1 + u_2 - c)/h$  et  $p_N = (d - \frac{u_{N-1} + u_N}{2})/h$ . Dans l'exemple 2, l'ordre est

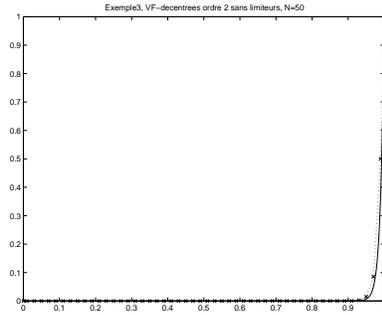


Figure 18: **Exemple 3, VF-d/ordre 2/sans limiteurs, N=50, x=solution approchée**

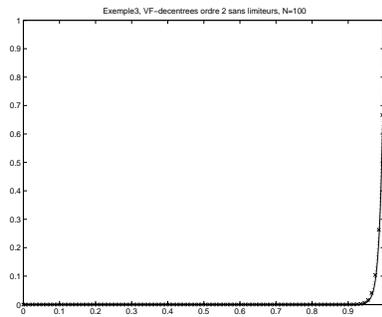


Figure 19: **Exemple 3, VF-d/ ordre 2/sans limiteurs, N=100, x=solution approchée**

environ 1.987 (au lieu de 1.973) pour  $N$  de l'ordre de 400 et l'erreur est de  $310^{-6}$  au lieu de  $210^{-5}$  (en norme  $\infty$ ). Par contre, dans l'exemple 3, les résultats sont plutôt moins bons avec  $p_1$  et  $p_N$  non nuls.

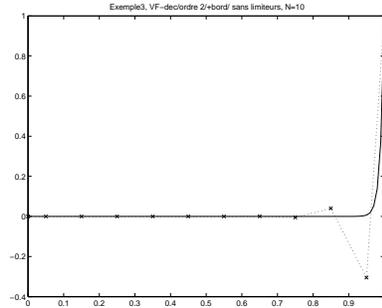


Figure 20: **Exemple 3, VF-d/ordre 2/+bord/sans limiteurs, N=10, x=solution approchée**

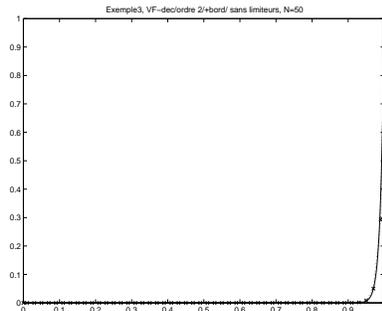


Figure 21: **Exemple 3, VF-d/ordre 2/+bord/sans limiteurs, N=50, x=solution approchée**

## 5 Discrétisation par VF-décentrés d'ordre 2, avec limiteurs

On suppose  $a > 0$ . On reprend dans cette question le même schéma que dans la question précédente en changeant légèrement la formule pour  $p_i$  :

$p_i = \min\{ (u_{i+1} - u_{i-1})/2h, 2(u_{i+1} - u_i)/h, 2(u_i - u_{i-1})/h \}$  avec  $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} = 0$  si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  n'ont pas tous le même signe et  $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} = \text{sign}(\alpha) \min\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\}$  si  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ont le même signe.

Ecrire un programme Scilab calculant cette solution approchée et déterminer numériquement l'ordre de convergence de la méthode sur le troisième exemple de la première question. Regarder aussi l'allure de la solution approchée pour  $h$  "grand". [On remarquera que le système à résoudre pour calculer  $u_1, \dots, u_N$

est maintenant un système non linéaire et on cherchera donc une méthode itérative convenable pour le résoudre. . .]

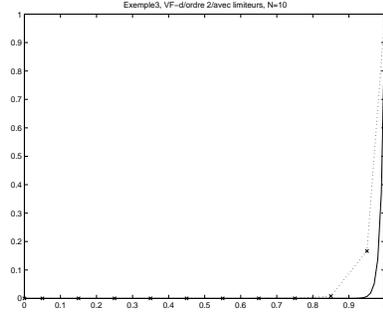


Figure 22: **Exemple 3, VF-d/ordre 2/avec limiteurs, N=10, x=solution approchée**

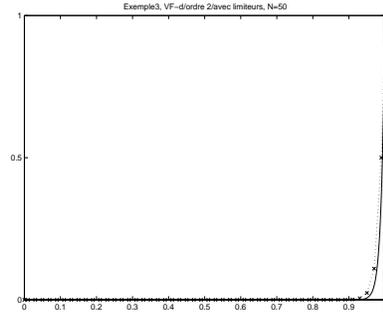


Figure 23: **Exemple 3, VF-d/ordre 2/avec limiteurs, N=50, x=solution approchée**

**Commentaire :** Grâce aux limiteurs, la solution est satisfaisante pour toute valeur de  $N$ . La convergence est aussi bonne que pour le schéma sans limiteurs. Pour l'exemple 3, avec  $N = 400$ , le résultat obtenu est identique à celui du schéma sans limiteurs. Comme dans le schéma précédent (schéma “sans limiteurs”), il est possible d’ajouter des pentes dans les mailles 1 et  $N$  en prenant, par exemple,  $p_1 = \min\{(\frac{u_1+u_2}{2} - c)/h, 2(u_2 - u_1)/h, 2(u_1 - c)/h\}$  et  $p_N = \min\{(d - \frac{u_N+u_{N-1}}{2})/h, 2(d - u_N)/h, 2(u_N - u_{N-1})/h\}$ . Ceci modifie très peu les résultats (pour l'exemple 3 et  $N = 400$ , l’erreur en norme  $L^\infty$  est légèrement moins bonne et l’erreur en norme  $L^2$  est légèrement meilleure).

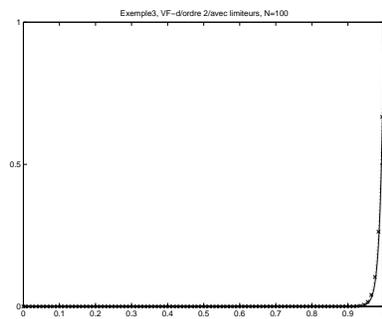


Figure 24: **Exemple 3, VF-d/ordre 2/avec limiteurs, N=100, x=solution approchée**