Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier,
Master 1, mathématiques et applications, 3eme evaluation, 17 novembre 2022

L'examen contient 4 exercices. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée. Vous pouvez utiliser les résultats qui ont été démontré en TD.

Exercice 1 (HB geométrique sans HB, barème 6 points)**.**
Soient H un espace de Hilbert réel, $C \subset H$ un convexe fermé non vide et $K \subset H$ un convexe compact non vide. On suppose que $K \cap C = \emptyset$ et on pose $d = \inf\{\|u - v\|_H,\ u \in K,\ v \in C\}$.
On note P_C et P_K les opérateurs de projection orthogonale sur C et K.

1. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \|a_n - b_n\|_H = d.$$

Montrer que l'on peut supposer (quitte à extraire une sous suite) que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On pose $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ et $b = P_C(a)$.
Montrer que $\|a - b\|_H = d$.

Corrigé – *Comme K est compact, on peut effectivement extraire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite convergente. On peut donc supposer que la suite converge et $a = \lim_{n\to+\infty} a_n \in K$*
Comme $b = P_C(a)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme $b_n \in C$),

$$\|a - b\|_H \le \|a - b_n\|_H \le \|a - a_n\|_H + \|a_n - b_n\|_H.$$

Quand $n \to +\infty$ on obtient $\|a - b\|_H \le d$ et donc $\|a - b\|_H = d$

On considère pour les deux questions suivantes un couple $(a, b) \in K \times C$ tel que $\|a - b\|_H = d$ (l'existence d'un tel couple a été prouvée à la question 1).

2. Montrer que $a = P_K(b)$.

Corrigé – *Pour tout $v \in K$, $\|b - a\|_H = d \le \|b - v\|_H$, ce qui prouve que $a = P_K(b)$.*

3. Donner explicitement en fonction de a et b un élément f de H' et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle f, u\rangle_{H',H} \le \gamma \text{ pour tout } u \in C,$$
$$\langle f, u\rangle_{H',H} > \gamma \text{ pour tout } u \in K.$$

Corrigé – *On définit $f \in E'$ par*

$$\langle f, u\rangle_{H',H} = (u \,|\, a - b)_H,$$

et on prend $\gamma = \|a - b\|_H^2$. La caractérisation de la projection sur un convexe fermé non vide donne

$$(a - b \,|\, b - u)_H \ge 0 \text{ pour tout } u \in C,$$
$$(b - a \,|\, a - u)_H \ge 0 \text{ pour tout } u \in K.$$

On en déduit

$$(a - b \,|\, u)_H \le (a - b \,|\, b)_H \text{ pour tout } u \in C,$$
$$(a - b \,|\, u)_H \ge (a - b \,|\, a)_H = (a - b \,|\, b)_H + (a - b \,|\, a - b)_H \text{ pour tout } u \in K.$$

Comme $(a - b \,|\, a - b)_H > 0$, on peut prendre $\gamma = (a - b \,|\, b)_H$.

4. (Exemples) on prend dans cette question $H = \mathbb{R}^2$ (muni de sa norme euclidienne habituelle).
   (a) Donner un exemple (sans détailler la preuve) pour lequel il existe plusieurs couples $(a, b) \in K \times C$ tels que $d = \|a - b\|_H$.

   Corrigé – $C = \{0\} \times [0, 1]$, $K = \{1\} \times [0, 1]$. *Tous les couples $\{(1, t), (0, t)\}$, avec $t \in [0, 1]$, conviennent.*

   (b) On suppose que K est fermé mais on ne suppose plus que K est compact. Donner un exemple (sans détailler la preuve) pour lequel il n'existe pas de couple $(a, b) \in K \times C$ tels que $d = \|a - b\|_H$.

Corrigé – $K = \mathbb{R} \times \{0\}$ *et* $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq e^x\}$*. Les ensembles* K *et* C *sont bien convexes fermés non vide mais la distance de* K *à* C *est nulle.*

Exercice 2 (Base algébrique, barème 3 points)**.**
Soient E un espace de Banach réel de dimension infinie. Soit $\{e_i,\ i \in I\}$ une base algébrique [1] de E, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $\{x_i,\ i \in I\}$ de nombres réels telle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i.
Comme la dimension de E est infinie, on peut supposer que I contient $\mathbb{N}$. On pose alors

$$x^{(n)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2 \|e_p\|_E} e_p.$$

1. Montrer que la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E.

   Corrigé – Il suffit de remarquer qu'elle est de Cauchy car, pour $m > n$, $\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_E \leq \sum_{p=n+1}^{m} \frac{1}{p^2}$ *et que la série* $\sum_{p \in \mathbb{N}^\star} \frac{1}{p^2}$ *est convergente.*

2. Montrer qu'il est impossible que toutes les applications $x \mapsto x_i$ (de E dans $\mathbb{R}$) soient continues (on rappelle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ et $x_i = 0$ sauf pour un nombre fini de i).

   Corrigé – On note x *la limite dans* E *de la suite* $x^{(n)}$*. On note* $x_i^{(n)}$ *(resp.* x_i*),* $i \in I$*, les composantes de* $x^{(n)}$ *(resp.* x*) dans le base* $\{e_i,\ i \in I\}$*.*
   Si toutes les applications $x \mapsto x_i$ *(de* E *dans* $\mathbb{R}$*) sont continues, on doit avoir, pour tout* $i \in I$*,*

   $$\lim_{n \to +\infty} x_i^{(n)} = x_i.$$

   Soit $i \in \mathbb{N}$*, comme* $x_i^{(n)} = \frac{1}{i^2 \|e_i\|_E}$ *pour* $n \geq i$*, on en déduit que* $x_i = \frac{1}{i^2 \|e_i\|_E} \neq 0$*, ce qui est impossible car* $x_i = 0$ *sauf pour un nombre fini de* i*.*

Exercice 3 (Séparabilité, barème 3 points)**.**
Soit E un e.v.n. séparable et A une partie de E dénombrable dense dans E. Soit F une partie E.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, Pour tout $x \in A$, si il existe au moins un point y de F tel que $\|x - y\|_E \leq 1/n$, on choisit un tel point et on le note $a_{x,n}$ (on a donc $a_{x,n} \in F$ et $\|x - a_{x,n}\|_E \leq 1/n$).
On note B_n l'ensemble des points obtenus ainsi (noter que $B_n \subset F$).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Construire une injection de B_n dans A (ce qui prouve que B_n est dénombrable).

   Corrigé – Pour tout $y \in B_n$*, on choisit un point* $x_y \in A$ *tel que* $y = a_{x_y,n}$ *(un tel* x_y *existe mais n'est pas nécessairement unique). On a ainsi construit une application* $y \mapsto x_y$ *de* B_n *dans* A*. Cette application est injective. En effet, si* $x_y = x_z$ *(avec* $y, z \in B_n$*) on a* $y = a_{x_y,n} = a_{x_z,n} = z$*.*

2. Construire avec les ensembles B_n ($n \in \mathbb{N}^\star$) une partie de F dénombrable dense dans F (ce qui prouve que F est séparable).

   Corrigé – Il suffit de prendre $B = \cup_{n \in \mathbb{N}^\star} B_n$*. On a bien* $B \subset F$ *et* B *dénombrable (comme union dénombrable d'ensembles dénombrables). On montre maintenant que* B *est dense dans* F*.*
   soit $y \in F$ *et* $n \in \mathbb{N}^\star$*. Comme* A *est dense dans* E*, il existe* $x \in A$ *tel que* $\|x - y\|_E \leq 1/n$*. On remarque alors que*

   $$\|y - a_{x,n}\|_E \leq \|y - x\|_E + \|x - a_{x,n}\|_E \leq \frac{2}{n}.$$

   Comme $a_{x,n} \in B$*, ceci prouve la densité de* B *dans* F*.*

---

1. Une telle base existe toujours, c'est une conséquence du lemme de Zorn

Exercice 4 (Convergence, convergence faible, convergence $\star$-faible, barème 8 points). Pour $1 \le p \le \infty$, on note L^p l'espace $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = 1_{[n,n+1]}$ (c'est-à-dire $f_n(x) = 1$ si $x \in [n, n+1]$ et 0 sinon). La fonction $f_n \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et on la confond avec l'élément de L^p auquel elle appartient.

1. Dans cette question $1 < p < \infty$.
   Montrer que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p quand $n \to +\infty$ (ce qui est équivalent à montrer que, pour tout $g \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$, $\int f_n(x)g(x)dx \to 0$).
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite dans L^p ?

   Corrigé – *Soit $g \in L^q$, en utilisant l'inégalité de Hölder,*
   $$|\int f_n(x)g(x)dx| \le \int |g(x)|1_{[n,n+1]}(x)dx \le (\int_{[n,n+1]} |g(x)|^q dx)^{1/q}.$$
   On pose $g_n = |g|^p 1_{[n,n+1]}$. Le théorème de convergence dominée donne $\int g_n dx \to 0$ (car $g_n \to 0$ p.p. et $|g_n| \le |g|^p \in L^1$) et donc $\int f_n(x)g(x)dx \to 0$. On a bien montré que $f_n \to 0$ faiblement dans L^p.
   Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avait une limite dans L^p, cette limite serait aussi la limite faible. On aurait donc $f_n \to 0$ dans L^p, ce qui est faux car $\|f_n\|_p = 1$.

2. Dans cette question $p = 1$.
   Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas faiblement convergente dans L^1 quand $n \to +\infty$. (On rappelle que $f_n \to f$ faiblement dans L^1 est équivalent à dire que, pour tout $g \in L^\infty$, $\int f_n(x)g(x)dx \to \int f(x)g(x)dx$).
   [On pourra raisonner en supposant que $f_n \to f$ faiblement dans L^1 et montrer une contradiction en choisissant convenablement des fonctions $g \in L^\infty$.]

   Corrigé – *On suppose que $f_n \to f$ faiblement dans L^1. Donc, pour tout $g \in L^\infty$, $\int f_n(x)g(x)dx \to \int f(x)g(x)dx)$.*
   En prenant, pour $p \in \mathbb{N}$, $g = sgn(f)1_{[-p,p]}$, on montre que
   $$\int_{[-p,p]} |f(x)|dx = \lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)g(x)dx = 0.$$
   On en déduit $f = 0$ p.p. sur $[-p,p]$. Comme $\mathbb{R} = \cup_{p\in\mathbb{N}}[-p,p]$ ceci donne $f = 0$ p.p..
   Puis en prenant $g = 1_{\mathbb{R}}$, on montre que $\int f(x)g(x)dx = 1$, ce qui est impossible car $f = 0$ p.p..

3. Dans cette question $p = \infty$.
   On prend maintenant $f_n = 1_{[n,+\infty[}$ (c'est-à-dire $f_n(x) = 1$ si $x \in [n, +\infty[$ et 0 sinon).
   (a) On identifie L^∞ avec $(L^1)'$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite $\star$-faible dans L^∞ ?
   Si oui, quelle est cette limite ?

   Corrigé – *Soit $g \in L^1$,*
   $$|\int f_n(x)g(x)dx| \le \int |g(x)|1_{[n,+\infty[}(x)dx.$$
   On pose $g_n = |g|1_{[n,+\infty[}$. Le théorème de convergence dominée donne $\int g_n dx \to 0$ (car $g_n \to 0$ p.p. et $|g_n| \le |g| \in L^1$) et donc $\int f_n(x)g(x)dx \to 0$. On a donc montré que $f_n \to 0$ $\star$-faiblement dans L^∞.

   (b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite faible dans L^∞ ? Si oui, quelle est cette limite ?
   [On pourra introduire le s.e.v de L^∞, $F = \{f \in L^\infty$ tel que $\lim_{p\to+\infty} \int_{[p,p+1]} f(x)dx$ existe dans $\mathbb{R}\}$ et utiliser $T \in F'$ défini par $\langle T, f\rangle_{F',F} = \lim_{p\to+\infty} \int_{[p,p+1]} f(x)dx$. On vérifiera que T appartient bien à F' lorsque F est muni de la norme de L^∞.]

   Corrigé – *L'application T est bien linéaire continue de F (muni de la norme de L^∞) dans $\mathbb{R}$ (et $\|T\|_{F'} \le 1$).*
   Par le théorème de Hahn-Banach, T se prolonge en $\bar{T} \in (L^\infty)'$.
   Si $f_n \to f$ faiblement dans L^∞, on a alors aussi $f_n \to f$ $\star$-faiblement dans L^∞ et donc $f = 0$ p.p.. On a donc $\langle \bar{T}, f_n\rangle_{(L^\infty)',L^\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui est impossible car $f_n \in F$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\langle \bar{T}, f_n\rangle_{(L^\infty)',L^\infty} = \lim_{p\to+\infty} \int_{[p,p+1]} f_n(x)dx = 1.$$