Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier,
Master 1, mathématiques et applications, 4eme évaluation, 8 décembre 2022

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 24 points. Les documents (polycopié du cours, notes de TD, notes personnelles) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée. Vous pouvez utiliser les résultats qui ont été démontrés en TD.

Rappels :

— Si $f \in \mathcal{L}^p$, on confond f avec l'élément de L^p auquel f appartient.

— Si $f \in L^p(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$ (ou I est un intervalle de $\mathbb{R}$) et que f contient une fonction continue, on identifie f avec cette fonction continue.

Exercice 1 (Convergence faible et convergence au sens des distributions, barème 5 points)**.**
On note $\mathcal{L}^p$ et L^p les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ et $L^p_{\mathbb{R}}(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1$. On suppose que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$,
$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.

Corrigé – *Comme il y a une isométrie entre $(L^1)'$ et L^∞, l'hypothèse donne que $f_n \to f$ faiblement dans L^1. Le théorème d Banach-Steinhaus donne alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^1.*

2. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n par $f_n = n^\alpha 1_{]0,1/n[} - n^\alpha 1_{]-1/n,0[}$.
Montrer que l'on peut choisir $\alpha > 0$ pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit non bornée dans L^1 et que la convergence donnée dans (1) soit vraie pour toute fonction $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[, \mathbb{R})$.

Corrigé – *On choisit α tel que $1 < \alpha < 2$.*
Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Un changement de variable simple donne
$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{1/n} n^\alpha(\varphi(x) - \varphi(-x))\,dx. \tag{2}$$
On pose $M = \max_{x\in]-1/n,1/n[} |\varphi'(x)|$ (et donc $M < +\infty$).
Pour tout $x \in]0,1/n[$, le théorème des accroissements finis donne $|\varphi(x) - \varphi(-x)| \le \frac{2M}{n}$. On en déduit avec (2)
$$\Big|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx\Big| \le 2Mn^{\alpha-2},$$
et donc, comme $\alpha < 2$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx = 0$, c'est-à-dire , en posant $f = 0$,
$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int f(x)\varphi(x)\,dx.$$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas bornée dans L^1. En effet pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\int_K |f_n(x)|\,dx = 2n^{\alpha-1},$$
et donc $\lim_{n\to+\infty} \int_K |f_n(x)|\,dx = +\infty$ car $\alpha > 1$.

Exercice 2 (Un opérateur linéaire compact autoadjoint dans $L^2(\mathbb{R})$, barème 16 points)**.**
On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.
Soit V une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $V(x) \ge 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = +\infty$.
On définit l'espace H par $H = \{u \in H^1(\mathbb{R})$ tel que $Vu \in L^2(\mathbb{R})\}$.
Si $u, v \in H$, on pose $(u\,|\,v)_H = \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_R V^2(x)u(x)v(x)dx$.

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)_H$ est un produit scalaire sur H.

Corrigé – *L'application $(u,v) \mapsto \int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_R V^2(x)u(x)v(x)dx$ de H^2 dans $\mathbb{R}$ est bilinéaire symétrique. De plus, pour $u \in H$, $\int_{\mathbb{R}} Du(x)Du(x)dx + \int_R V^2(x)u(x)u(x)dx = 0$ implique $u = 0$ p.p. (et même partout en confondant u avec son représentant continu). Cette application est donc un produit scalaire.*

Dans la suite on munit H de ce produit scalaire.

2. Montrer que H est un espace de Hilbert. [Utiliser $V \geq 1$ p.p..]

   Corrigé –
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de H. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est complet, il existe v et w telles que, quand $n \to +\infty$,
   $$Vu_n \to v \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$
   $$Du_n \to w \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$
   On pose $u = v/V$, on a donc $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ (car $|u_n - u| \leq |V(u_n - u)| = |Vu_n - v|$).
   Puis, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, en utilisant les convergences dans $L^2(\mathbb{R})$ de u_n et Du_n,
   $$\int u(x)\varphi'(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int u_n(x)\varphi'(x)dx = -\lim_{n\to+\infty}\int Du_n(x)\varphi(x)dx = -\int w(x)\varphi(x)dx.$$
   Ceci donne que $u \in H^1(\mathbb{R})$ et $Du = w$ p.p.. Cela donne aussi $u \in H$ car $Vu = v$ p.p. et $v \in L^2(\mathbb{R})$.
   Finalement, comme $\|u_n - u\|_H^2 = \|Du_n - Du\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|Vu_n - Vu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|Du_n - w\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|Vu_n - v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$, o a bien $u_n \to u$ dans H quand $n \to +\infty$.

3. Soit $u \in H$. Montrer que u est uniformément continu. En déduire que $u(x) \to 0$ quand $x \to \pm + \infty$.

   Corrigé – *Le fait que u est uniformément continu découle de l'inégalité, vue en cours, pour $y > x$,*
   $$|u(y) - u(x)| = |\int_x^y Du(t)dt| \leq \|Du\|_2\sqrt{|y - x|}.$$
   On en déduit que $u(x) \to 0$ quand $x \to \pm + \infty$. Cela a été essentiellement montré en TD. On redonne la preuve ici. On raisonne par l'absurde. On suppose que $u(x) \not\to 0$ quand $x \to +\infty$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ et $|u(x_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   La continuité uniforme de u donne l'existence de $\eta > 0$ tel que
   $$x, y \in \mathbb{R}, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
   On a donc $|u(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $x \in]x_n - \eta, x_n + \eta[$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $\int u^2 1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}d\lambda \geq \varepsilon^2\eta/2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible car le théorème de convergence dominée permet de montrer, comme u^2 est intégrable, que $\int u^2 1_{]x_n-\eta,x_n+\eta[}d\lambda \to 0$ quand $n \to +\infty$.

   On a donc bien finalement montré que $u(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. (Un raisonnement analogue donne que $u(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$.)

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de H.

   (a) Soit $p \in N^\star$.
   Soient x, $y \in [-p, p]$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,
   $$|u_n(x) - u_n(y)] \leq \|u_n\|_H\sqrt{|x - y|}.$$
   $$|u_n(x)| \leq (1 + 2p)\|u_n\|_H.$$
   En déduire que la suite des restrictions des u_n à $[-p, p]$ est relativement compacte dans $C([-p, p], \mathbb{R})$.

   Corrigé – *pour $x > y$, $u_n(x) - u_n(y) = \int_y^x Du_n(t)dt$ et donc avec l'inégalité Cauchy-Schwarz,*
   $$|u_n(x) - u_n(y)] \leq \|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{|x - y|} \leq \|u_n\|_H\sqrt{|x - y|}.$$
   Pour x fixé dans $] - p, p[$, on intégre sur $] - p, p[$ l'inégalité
   $$|u_n(x)| \leq |u_n(y)| + \|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\sqrt{|x - y|} \leq |u_n(y)| + 2p\|Du\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$
   On obtient, avec l'inégalité Cauchy-Schwarz (et $V \geq 1$)
   $$2p|u_n(x)| \leq \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})}2p + 4p^2\|Du_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq (2p + 4p^2)\|u_n\|_H,$$
   c'est-à-dire $|u_n(x)| \leq (1 + 2p)\|u_n\|_H$.

   Le théorème d'Ascoli donne la déduction demandée.

En utilisant le procédé diagonal (vu en cours), une conséquence de la question 4a est qu'il existe une sous suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une fonction φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et une fonction u telles que $u_{\varphi(n)} \to u$ (quand $n \to +\infty$) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.
Pour la suite de cette question, on note encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sous suite ainsi trouvée, de sorte que $u_n \to u$ (quand $n \to +\infty$) uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $Vu \in L^2(\mathbb{R})$. [On pourra utiliser le lemme de Fatou, vu en intégration.]

Corrigé –
Comme $u_n(x) \to u(x)$ (quand $n \to +\infty$) pour tout $x \in \mathbb{R}$,
le lemme de Fatou donne $\int V^2(x)u^2(x)dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int V^2(x)u_n^2(x)dx$ et donc

$$\int V^2(x)u^2(x)dx \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_H < +\infty.$$

(c) Montrer que $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$. [Utiliser $V(x) \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$.]

Corrigé – *pour tout $a > 0$, on pose $V_a = \inf_{|x|>a} V^2(x)$,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u_n(x)-u(x)|^2dx &= \int_{[-a,a]^c} |u_n(x)-u(x)|^2dx + \int_{[-a,a]} |u_n(x)-u(x)|^2dx \\ &\le \frac{1}{V_a}\int_{[-a,a]^c} V^2(x)|u_n(x)-u(x)|^2dx + \int_{[-a,a]} |u_n(x)-u(x)|^2dx \\ &\le \frac{2}{V_a}\int_{[-a,a]^c} V^2(x)u_n^2(x)dx + \frac{2}{V_a}\int_{[-a,a]^c} V^2(x)u^2(x)dx + \int_{[-a,a]} |u_n(x)-u(x)|^2dx.\end{aligned}$$

On pose $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_H$, de sorte que $\int V^2(x)u_n^2(x)dx \le M$.
La question 4b donne alors $\int V^2(x)u^2(x)dx \le M$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n(x)-u(x)|^2dx \le \frac{4M}{V_a} + \int_{[-a,a]} |u_n(x)-u(x)|^2dx.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $V(x) \to +\infty$ quand $x \to \pm\infty$, il existe $a > 0$ tel que $\frac{4M}{V_a} \le \varepsilon$. Comme $u_n \to u$ uniformément sur $[-a,a]$, il existe n_0 tel que

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int_{[-a,a]} |u_n(x)-u(x)|^2dx \le \varepsilon,$$

et donc

$$n \ge n_0 \Rightarrow \int |u_n(x)-u(x)|^2dx \le 2\varepsilon.$$

Ce qui prouve que $u_n \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$.

La conséquence de la question 4 est que l'application $u \mapsto u$ est compacte de H dans $L^2(\mathbb{R})$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on cherche $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solution du problème suivant :

$$-u''(x) + V^2(x)u(x) = f(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$
$$u(x) \to 0, \text{ quand } x \to \pm\infty. \tag{4}$$

On dit que u est solution faible de (3)-(4) si u est solution de

$$u \in H, \tag{5}$$
$$\int_{\mathbb{R}} Du(x)Dv(x)dx + \int_{\mathbb{R}} V^2(x)u(x)v(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H. \tag{6}$$

5. Montrer que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe un et un seul u solution de (5)-(6)

Corrigé – *Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.*
On définit l'opérateur F de H dans $\mathbb{R}$ par $F(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x)v(x)dx = (f|v)_{L^2(\mathbb{R})}$. l'application F appartient à H' (car $\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|v\|_H$).
Le problème (5)-(6) consiste à chercher $u \in H$ tel que $(u|v)_H = F(v)$ pour tout $v \in H$. L'existence et l'unicité de u est donc donné par le théorème de representation de Riesz dans les espaces de Hilbert.

6. Montrer que l'opérateur $T:\ f \mapsto u$ (où u est, pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, la solution de (5)-(6)) est linéaire autoadjoint compact de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Corrigé – *L'application $f \mapsto u$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est la composée de l'application $f \mapsto u$ de $L^2(\mathbb{R})$ dans H, qui est linéaire continue (car $\|u\|_H \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$), et de l'application $u \mapsto u$ de H dans $L^2(\mathbb{R})$, qui est linéaire compacte, elle est donc linéaire compacte.*
On montre maintenant que $T = T^\star$. Soient f, $g \in L^2(\mathbb{R})$ et u, $v \in H$ les solutions correspondantes de (5)-(6)). Avec le choix de u dans la formulation faible pour g et le choix de v dans la formulation faible pour f, on obtient

$$(g|Tf)_{L^2(\mathbb{R})} = (v|u)_H = (u|v)_H = (f|v)_{L^2(\mathbb{R})}) = (f|Tg)_{L^2(R)} = (Tg|f)_{L^2(R)}.$$

Ceci prouve le caratère autoadjoint de T.

7. On suppose que V^4 est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et u la solution de (5)-(6).
Soit $a > 0$. On note encore u la restriction de u à l'intervalle $[-a, a]$.
Montrer que $u \in C^1([-a, a])$, $u' \in H^1(]-a, a[)$ et $D(u') = V^2u - f$ p.p. sur I.
[Utiliser (6) avec $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convenablement choisie.]

Corrigé – *On pose $I =]-a, a[$ et on définit H sur $[-a, a]$ par $H(x) = \int_{-a}^{x}(f(x) - V^2(x)u(y))dy$.*
Comme $f - V^2u \in L^2_{\mathbb{R}}(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$, en reprenant la preuve du théorème 8.2, $H \in H^1(I)$ et $DH = f - V^2u$ p.p..
On a donc, pour $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$,

$$\int_I Du(x)\varphi'(x)dx = \int_I (f(x) - V^2(x)u(x))\varphi(x)dx = -\int_I H(x)\varphi'(x)dx.. \qquad (7)$$

On choisit une fonction $\varphi_0 \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que $\int_I \varphi_0(x)dx = 1$.
Pour $\psi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$ on choisit dans (7) $\varphi(x) = \int_{-a}^{x} \psi(y)dy - \int_I \psi(t)dt \int_{-a}^{x} \varphi_0(y)dy$ (de sorte que $\varphi \in C_c^\infty(I, \mathbb{R})$).
On obtient, avec $c = \int_I (Du(y) + H(y))\varphi_0(y)dy$,

$$\int (Du(x) + H(x) - c)\psi(x)dx = 0.$$

Ceci prouve que $Du = -H + c$ p.p. sur I et donc $u \in C^1([-a, a], \mathbb{R})$ et $u'(x) = -H(x) + c$ pour tout $x \in [-a, a]$.
Enfin, comme $H \in H^1(I)$ on a bien $u' \in H^1(I)$ et $D(u') = -DH = -f + V^2u$ p.p. sur I.

Exercice 3 (Un peu de Fourier pour finir, barème 3 points)**.**
Soit $f \in L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On suppose que $f \ge 0$ p.p..

1. Montrer que $\hat{f}(0) = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1$ et que , pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Re}(\hat{f}(t))| \le |\hat{f}(t)| \le (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1$.

Corrigé – *On utilise le fait que f est à valeurs réelles positives,*

$$\hat{f}(0) = (1/\sqrt{2\pi}) \int f(x)dx = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1 \text{ et, pour tout } t \in \mathbb{R},$$

$$|\operatorname{Re}(\hat{f}(t))| \le |\hat{f}(t)| = (1/\sqrt{2\pi})|\int f(x)e^{ixt}dx| \le (1/\sqrt{2\pi})|\int |f(x)|dx = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1.$$

2. On suppose qu'il existe $t \in \mathbb{R}$, $t \ne 0$, tel que $|\operatorname{Re}(\hat{f}(t))| = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1$. Montrer que $f = 0$ p.p..

Corrigé – *On suppose* $\mathrm{Re}(\hat{f}(t)) \geq 0$*. On a alors*

$$0 = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1 - \mathrm{Re}(\hat{f}(t)) = (1/\sqrt{2\pi}) \int f(x)(1 - \cos(xt))dt.$$

Comme $1 - \cos(xt) > 0$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $f \geq 0$ *p.p., ceci donne* $f = 0$ *p.p..*
De même, si $\mathrm{Re}(\hat{f}(t)) < 0$*, on a alors*

$$0 = (1/\sqrt{2\pi})\|f\|_1 + \mathrm{Re}(\hat{f}(t)) = (1/\sqrt{2\pi}) \int f(x)(1 + \cos(xt))dt.$$

Comme $1 + \cos(xt) > 0$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $f \geq 0$ *p.p., ceci donne aussi* $f = 0$ *p.p..*