Universités de Marseille, Analyse fonctionnelle, pb 4, octobre 2005
Théorème de point fixe, dû à F. E. Browder

Dans ce problème, on va, en particulier, démontrer le théorème suivant, dû à F. E. Browder (ne pas confondre ce théorème avec le théorème de point fixe de Brouwer) :

Théorème 1 *Soit E un espace de Banach uniformément convexe, $C \subset E$ une partie convexe fermée bornée non vide et T une application de C dans C t.q. $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $x, y \in C$. Alors, T admet un point fixe.*

Soit E un espace de Banach (réel) et $C \subset E$ une partie convexe fermée non vide. On suppose que E est uniformément convexe , c'est-à-dire que :

$$\begin{array}{l}\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \delta > 0 \text{ t.q. :}\\ x, y \in E,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta.\end{array}$$

On rappelle (ou on admet...) qu'un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Partie I

Montrer que pour tout $R > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$(a, b \in E, \|a\| \leq R, \|b\| \leq R, \|a - b\| > \varepsilon) \Rightarrow (\|\frac{a+b}{2}\|^2 \leq \frac{1}{2}\|a\|^2 + \frac{1}{2}\|b\|^2 - \delta).$$

[On pourra raisonner par l'absurde.]

Partie II

Soit $A \subset C$ un ensemble borné non vide. On définit φ de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \sup_{y \in A} \|x - y\| \text{ pour } x \in E.$$

1. Montrer que φ est une fonction convexe et que $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$ pour tout $x_1, x_2 \in E$.
2. Montrer qu'il existe un unique élément $c \in C$ t.q. $\varphi(c) = \inf_{x \in C} \varphi(x)$.

   Cet élément c est appelé le *centre* de A. Dans la suite on note $\sigma(A)$ le centre de A.
3. Montrer que si A n'est pas réduit à un élément, on a alors :

$$\varphi(\sigma(A)) < \operatorname{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

Partie III

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de C. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$A_n = \cup_{i=n}^{\infty} \{a_i\},$$

et on définit φ_n de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(x) = \sup_{y \in A_n} \|x - y\| \text{ pour } x \in E.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(\varphi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$.

   On définit φ de E dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$ pour $x \in E$.

2. Montrer que φ est continue sur E.

3. Montrer qu'il existe un unique $\overline{\sigma} \in C$ t.q. $\varphi(\overline{\sigma}) = \inf_{x \in C} \varphi(x)$.

   On dit que $\overline{\sigma}$ est le *centre asymptotique* de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\sigma_n = \sigma(A_n)$ ($\sigma(A_n)$ est le centre de A_n, défini danas la partie II). Montrer que $\sigma_n \to \overline{\sigma}$ faiblement dans E (c'est-à-dire pour la topologie $\sigma(E, E')$), quand $n \to \infty$, et que :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\sigma_n) = \varphi(\overline{\sigma}).$$

5. Montrer que $\sigma_n \to \overline{\sigma}$ dans E. [on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la partie I.]

6. On suppose, dans cette question, que $a_n \to a$ dans E, quand $n \to \infty$. Montrer que a est le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. On suppose, dans cette question, que E est une espace de Hilbert et que $a_n \to a$ faiblement dans E, quand $n \to \infty$. Montrer que a est le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [Penser à developper les carrés de normes...]

Partie IV

Soit T une application de C dans C t.q. $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $x, y \in C$. (On dit que T est une contraction au sens large.)

1. Soit $a \in C$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déléments de C en posant $a_0 = a$ et $a_{n+1} = T(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $\overline{\sigma}$ le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\overline{\sigma}$ est un point fixe de T (c'est-à-dire que $T(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}$).

2. En déduire le théorème 1.