Universités de Marseille, Analyse fonctionnelle, pb 4, décembre 2005
Corrigé

On rappelle la définition de l'uniformément convexité de E :

$$\begin{array}{l}\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \delta > 0 \text{ t.q. :}\\ x, y \in E,\ \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \le 1-\delta.\end{array}$$

On rappelle (ou on admet...) qu'un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Partie I. On démontre la propriété par l'absurde. On suppose qu'il existe $R > 0$, $\varepsilon > 0$ et deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. :

$$\|a_n\| \le R,\ \|b_n\| \le R,\ \|a_n - b_n\| > \varepsilon \text{ et } \|\frac{a_n+b_n}{2}\|^2 > \frac{1}{2}\|a_n\|^2 + \frac{1}{2}\|b_n\|^2 - \frac{1}{n}. \tag{1}$$

On pose $\alpha_n = \|a_n\|$ et $\beta_n = \|b_n\|$. on peut supposer (après extraction de sous suites) que $\alpha_n \to \alpha$ et $\beta_n \to \beta$ quand $n \to \infty$.
On remarque tout d'abord que :

$$\frac{1}{2}\|a_n\|^2 + \frac{1}{2}\|b_n\|^2 - \frac{1}{n} < \|\frac{a_n+b_n}{2}\|^2 \le \frac{\|a_n\|^2}{4} + \frac{\|b_n\|^2}{4} + \frac{\|a_n\|\|b_n\|}{2},$$

et donc $\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{\|a_n\| - \|b_n\|}{2}\right)^2 \le \frac{1}{n}$. Ce qui prouve que $\alpha = \beta$.
On remarque ensuite que $\alpha \ne 0$ car $\varepsilon < \|a_n - b_n\| \le \alpha_n + \beta_n$ (et donc $\varepsilon \le 2\alpha$).

On utilise maintenant l'uniforme convexité de E. Il existe $\delta > 0$ t.q. :

$$\|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1, \|x-y\| \ge \frac{\varepsilon}{2\alpha} \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| \le 1-\delta. \tag{2}$$

Soit $0 < \eta < \alpha$. On peut supposer, en retirant éventuellement les premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que $\alpha_n \le \alpha + \eta$ et $\beta_n \le \alpha + \eta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $\alpha + \eta \le 2\alpha$, on peut utiliser (2) avec $x = \dfrac{a_n}{\alpha+\eta}$ et $y = \dfrac{b_n}{\alpha+\eta}$. On obtient :

$$\|\frac{a_n+b_n}{2}\| \le (1-\delta)(\alpha+\eta).$$

En utilisant (1) et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient donc $\alpha \le (1-\delta)(\alpha+\eta)$. Comme η peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit $\alpha \le (1-\delta)\alpha$, ce qui impossible car $\alpha \ne 0$. Ceci termine la preuve de la partie I.

Partie II
Question 1 Soit $x, z \in E$ et $t \in [0,1]$. Pour tout $y \in A$, on a :

$$\|tx + (1-t)z - y\| = \|t(x-y) + (1-t)(z-y)\| \le t\|x-y\| + (1-t)\|z-y\| \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(z).$$

En prenant le sup pour $y \in A$ de cette inégalité on obtient $\varphi(tx + (1-t)z) \le t\varphi(x) + (1-t)\varphi(z)$. Ce qui prouve la convexité de φ.

Soit $x_1, x_2 \in E$, on peut supposer que $\varphi(x_1) \ge \varphi(x_2)$. Soit $y \in A$. On a, par l'inégalité triangulaire, $\|x_1 - y\| - \|x_2 - y\| \le \|x_1 - x_2\|$. Comme $\|x_2 - y\| \le \varphi(x_2)$, on en déduit $\|x_1 - y\| - \varphi(x_2) \le \|x_1 - x_2\|$. En prenant le sup pour $y \in A$ de cette inégalité on obtient $\varphi(x_1) - \varphi(x_2) \le \|x_1 - x_2\|$.

Question 2

Existence de c. On pose $\alpha = \inf_{x\in C}\varphi(x)$ (donc $\alpha \geq 0$). Comme $\alpha + \frac{1}{n}$ n'est pas un minorant de l'ensemble $\{\varphi(x),\, x \in C\}$, il existe $x_n \in C$ t.q. $\varphi(x_n) \leq \alpha + \frac{1}{n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite d'éléments de C t.q. $\varphi(x_n) \to \alpha$ quand $n \to \infty$.

On remarque que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En effet, soit $y \in A$, on a $\|x_n\| - \|y\| \leq \|x_n - y\| \leq \varphi(x_n)$. On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car la suite $\varphi(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Comme l'espace E est réflexif, on peut donc supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement. Il existe donc $x \in E$ t.q. $x_n \to x$, faiblement dans E, quand $n \to \infty$. Comme C est convexe fermée, C est aussi séquentiellement faiblement fermée. On en déduit que $x \in C$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. L'ensemble $C_\varepsilon = \{x \in C,\, \varphi(x) \leq \alpha+\varepsilon\}$ est convexe (car φ est convexe) fermé (car φ est continue). Il est donc aussi séquentiellement faiblement fermée. Comme il existe n_0 t.q. $x_n \in C_\varepsilon$ pour $n \geq n_0$, on en déduit que $x \in C_\varepsilon$ et donc que $\varphi(x) \leq \alpha + \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, et que $\varphi(x) \geq \alpha$, on a donc $\varphi(x) = \alpha$. Ce qui prouve la partie "existence" de la question.

Il est utile (pour la partie III) de remarquer que le raisonnement précédent donne le résultat suivant : Si $x_n \to x$ faiblement dans E et $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a alors $\varphi(x) \leq \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)$. Si la suite $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, il suffit de considérer une sous suite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour avoir le même résultat avec "lim inf" au lieu de "lim". On a donc, pour une fonction φ convexe continue :

$$x_n \to x \text{ faiblement dans } E \Rightarrow \varphi(x) \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \varphi(x_n). \tag{3}$$

Unicité de c. Soit $x_1, x_2 \in C$ t.q. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \alpha = \inf_{x\in C}\varphi(x)$. On suppose que $x_1 \neq x_2$ et on va montrer que $\varphi(\frac{x_1+x_2}{2}) < \alpha$, ce qui est impossible car $\frac{x_1+x_2}{2} \in C$.

On pose $\gamma = \sup_{y\in A}\|y\|$. On a $\gamma < \infty$ car A est borné. On pose alors $R = \max\{\gamma + \|x_1\|, \gamma + \|x_2\|\}$ et $\varepsilon = \|x_1 - x_2\|$. On utilise l'inégalité donnée par la partie I avec $a = x_1 - y$ et $b = x_2 - y$ pour $y \in A$. On obtient donc pour un $\delta > 0$ indépendant de $y \in A$:

$$\|\frac{x_1 + x_2}{2} - y\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_1 - y\|^2 + \frac{1}{2}\|x_2 - y\|^2 - \delta.$$

Comme $\|x_i - y\| \leq \varphi(x_i) = \alpha$, pour $i = 1, 2$, on en déduit que $\|\dfrac{x_1 + x_2}{2} - y\|^2 \leq \alpha^2 - \delta$ pour tout $y \in A$. On a donc (en prenant le sup sur $y \in A$) $\varphi(\frac{x_1+x_2}{2}) < \alpha$, ce qui est impossible car $\frac{x_1+x_2}{2} \in C$.

Question 3
Comme A n'est par réduit à un élément, il existe $x \in A$ avec $x \neq \sigma(A)$ (même si $\sigma(A) \in A$). Comme $x \in C$, l'unicité démontrée dans la question précédente donne que $\varphi(\sigma(A)) < \varphi(x) = \sup_{y\in A}\|x - y\| \leq \sup_{y,z\in A}\|y - z\|$.

Partie III
Question 1 Soit $x \in E$. Comme $A_{n+1} \subset A_n$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est minorée par 0. Elle donc convergente dans $\mathbb{R}$ (et même dans R_+).

Question 2 Soit $x_1, x_2 \in C$. La partie II donne $|\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quand $n \to \infty$, on en déduit $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \|x_1 - x_2\|$. Cette inégalité est vraie pour tout $x_1, x_2 \in C$. On en déduit que φ est lipschitzienne et donc continue.

Question 3
Existence de $\overline{\sigma}$. On raisonne comme à la question 2 de la partie II. On pose $\alpha = \inf_{x\in C}\varphi(x)$ (donc $\alpha \geq 0$). Il existe une suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C t.q. $\varphi(x_p) \to \alpha$ quand $p \to \infty$.

Pour montrer que $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée on note $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|a_n\|$. On a $M < \infty$ car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Soit $x \in C$, on a, pour tout $y \in A_n$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq \varphi_n(x)$ et donc $\|x\| \leq \varphi_n(x) + M$. Quand $n \to \infty$, on en déduit $\|x\| \leq \varphi(x) + M$. Pour $x = x_p$, ceci donne $\|x_p\| \leq \varphi(x_p) + M$. Comme la suite $(\varphi(x_p))_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée (car convergente vers $\alpha \in \mathbb{R}_+$), on en déduit que la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée. On peut donc supposer (après extraction éventuelle d'une sous suite) que la suite $(x_p)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement.

Comme $\varphi_n$est convexe et que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ pour tout $x \in E$, on montre facilement que φ est convexe. La fonction φ est donc convexe continue. Le raisonnement de la question 2 de la partie II montre alors que la limite faible de la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, notée $\overline{\sigma}$, appartient à C et que $\varphi(\overline{\sigma}) = \alpha$. Ce qui prouve la partie "existence" de la question.

Unicité de $\overline{\sigma}$. On fait ici un raisonnement semblable à celui de la question 2 de la partie II en remplaçant γ par M. Soit $x_1, x_2 \in C$ t.q. $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \alpha = \inf_{x\in C} \varphi(x)$. On suppose que $x_1 \neq x_2$ et on pose $R = \max\{M + \|x_1\|, M + \|x_2\|\}$ et $\varepsilon = \|x_1 - x_2\|$. On utilise l'inégalité donnée par la partie I avec $a = x_1 - y$ et $b = x_2 - y$, pour $y \in A_n$ et $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc pour un $\delta > 0$ indépendant de $y \in A_n$ et de $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\frac{x_1 + x_2}{2} - y\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_1 - y\|^2 + \frac{1}{2}\|x_2 - y\|^2 - \delta.$$

Comme $\|x_i - y\| \leq \varphi_n(x_i)$, pour $i = 1, 2$, on en déduit que $\|\frac{x_1 + x_2}{2} - y\|^2 \leq \frac{1}{2}\varphi_n(x_1)^2 + \frac{1}{2}\varphi_n(x_2)^2 - \delta$ pour tout $y \in A_n$. On a donc (en prenant le sup sur $y \in A_n$) :

$$\varphi_n(\frac{x_1 + x_2}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\varphi_n(x_1)^2 + \frac{1}{2}\varphi_n(x_2)^2 - \delta.$$

En faisant $n \to \infty$ dans cette inégalité, on en déduit $\varphi(\frac{x_1+x_2}{2})^2 \leq \alpha^2 - \delta$, et donc $\varphi(\frac{x_1+x_2}{2}) < \alpha$, ce qui est impossible car $\frac{x_1+x_2}{2} \in C$ et $\alpha = \inf_{x\in C} \varphi(x)$.

Question 4
Comme $\varphi \leq \varphi_n$, $\varphi_n(\sigma_n) = \inf_{x\in C} \varphi_n(x)$ et $\varphi(\overline{\sigma}) = \inf_{x\in C} \varphi(x)$, on a :

$$\varphi(\overline{\sigma}) \leq \varphi(\sigma_n) \leq \varphi_n(\sigma_n) \leq \varphi_n(\overline{\sigma}). \tag{4}$$

Comme $\varphi_n(\overline{\sigma}) \to \varphi(\overline{\sigma})$ quand $n \to \infty$, on en déduit les égalités demandées :

$$\varphi(\overline{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\sigma_n).$$

Pour montrer la convergence faible de la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre tout d'abord que cette suite est bornée. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in A_n$, $\|\sigma_n\| - \|y\| \leq \|\sigma_n - y\| \leq \varphi_n(\sigma_n) \leq \varphi_n(\overline{\sigma})$. On a donc, avec $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\|$:

$$\|\sigma_n\| \leq \varphi_n(\overline{\sigma}) + M.$$

Ce qui prouve bien que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car la suite $(\varphi_n(\overline{\sigma}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (elle converge en décroissant vers $\varphi(\overline{\sigma})$).

On montre maintenant que la seule limite faible possible de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\overline{\sigma}$. En effet, supposons $\sigma_n \to x$, faiblement dans E, quand $n \to \infty$. On a $x \in C$ car on a déjà montré que C était séquentiellement faiblement fermé. L'inégalité (3) donne alors $\varphi(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(\sigma_n) = \varphi(\overline{\sigma})$. Comme $\overline{\sigma}$ est l'unique élément de C minimisant φ, on en déduit $x = \overline{\sigma}$.

Dans le raisonnement précédent, on a supposé que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait faiblement (et on a montré que la limite ne pouvait être que $\overline{\sigma}$). Pour montrer que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge effectivement faiblement vers $\overline{\sigma}$, on raisonne par l'absurde. On suppose que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers $\overline{\sigma}$. Il existe alors alors $T \in E'$ t.q. $T(\sigma_n) \not\to T(\overline{\sigma})$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous suite, notée encore $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour ne pas embrouuiller le lecteur fatigué), t.q. $|T(\sigma_n) - T(\overline{\sigma})| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De cette sous suite, on peut extraire (comme E est réflexif et que la suite est bornée) une sous suite, toujours notée $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car le lecteur est définitivement embrouillé), faiblement convergente. . . et le raisonnement précédent montre que la limite faible ne peut être que $\overline{\sigma}$, en contradiction avec $|T(\sigma_n) - T(\overline{\sigma})| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a ainsi montré la convergence faible de $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\overline{\sigma}$. Ce qui termine cette question.

Question 5 On suppose que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\overline{\sigma}$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous suite, encore notée $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, t.q. $\|\sigma_n - \overline{\sigma}\| \geq \varepsilon$. Comme $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on reprend le raisonnement de la partie "unicité" de la question 3 (partie III), il donne l'existence de $\delta > 0$ t.q. :

$$\varphi(\overline{\sigma})^2 \leq \varphi(\frac{\sigma_n + \overline{\sigma}}{2})^2 \leq \varphi_n(\frac{\sigma_n + \overline{\sigma}}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\varphi_n(\sigma_n)^2 + \frac{1}{2}\varphi_n(\overline{\sigma})^2 - \delta.$$

Comme $\varphi(\overline{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(\overline{\sigma})$, on en déduit :

$$\varphi(\overline{\sigma})^2 \leq \varphi(\overline{\sigma})^2 - \delta.$$

ce qui est impossible.

Question 6 On remarque que $\varphi_n(a) = \sup_{p\geq n} \|a_p - a\| \to 0$ qaund $n \to \infty$, car $a_n \to a$ quand $n \to \infty$. On a donc $\varphi(a) = 0$ et donc $\varphi(a) = \inf_{x\in C} \varphi(x)$ car $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \in C$. Ceci montre que a est bien le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 7 Soit $x \in C$. On compare $\varphi_n(a)$ et $\varphi_n(x)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n$ on a (en désignant le produit scalaire par $(\cdot/\cdot)$) :

$$\|a - a_p\|^2 = \|x - a_p\|^2 + \|a\|^2 - 2(a/a_p) - \|x\|^2 + 2(x/a_p) \leq \varphi_n(x) + \|a\|^2 - 2(a/a_p) - \|x\|^2 + 2(x/a_p).$$

et donc, en prenant le sup sur $p \geq n$:

$$\varphi_n(a) \leq \varphi_n(x) + \|a\|^2 - 2\inf_{p\geq n}(a/a_p) - \|x\|^2 + 2\sup_{p\geq n}(x/a_p). \tag{5}$$

Quand $n \to \infty$ on a $(a/a_n) \to \|a\|^2$ et $(x/a_n) \to (x/a)$. On déduit donc de (5) quand $n \to \infty$:

$$\varphi(a) \leq \varphi(x) - \|a\|^2 - \|x\|^2 + 2(x/a) = \varphi(x) - \|a - x\|^2 \leq \varphi(x).$$

Ceci montre que a est bien le centre asymptotique de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie IV

Question 1 On utilise la partie II avec cette suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour définir $\overline{\sigma}$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, On majore $\varphi_n(T(\overline{\sigma}))$ en utilisant le fait que T est contractante (au sens large) :

$$\varphi_n(T(\overline{\sigma})) = \sup_{p\geq n} \|T(\overline{\sigma}) - a_p\| = \sup_{p\geq n} \|T(\overline{\sigma}) - T(a_{p-1})\| \leq \sup_{p\geq n} \|\overline{\sigma} - a_{p-1}\| = \sup_{p\geq n-1} \|\overline{\sigma} - a_p\| = \varphi_{n-1}(\overline{\sigma}).$$

Quand $n \to \infty$, on en déduit $\varphi(T(\overline{\sigma})) \leq \varphi(\overline{\sigma}))$. Comme $T(\overline{\sigma}) \in C$, on a donc nécessairement (par unicité de $\overline{\sigma}$), $T(\overline{\sigma}) = \overline{\sigma}$.

Question 2 Comme C est supposé bornée dans les hypothèses du théorème 1, Le théorème est une conséquence immédiate de la question précédente (la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car elle appartient à C).