

Universités de Marseille, Analyse fonctionnelle
Analyse, TD, Feuille 4, Octobre 2005

Exercice 1 (Trois applications de Hahn-Banach)

Soit E un espace de Banach réel.

1. Soit $x \in E$, $x \neq 0$. Montrer qu'il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) = \|x\|_E$ et $\|T\|_{E'} = 1$.
2. Soient F un s.e.v de E et $x \in E$. Montrer que $x \notin \bar{F}$ si et seulement si il existe $T \in E'$ t.q. $T(x) \neq 0$ et $T(y) = 0$ pour tout $y \in F$.
3. Pour $x \in E$, on définit J_x de E' dans $\mathbb{R}$ par $J_x(T) = T(x)$ pour tout $T \in E'$. Montrer que $J_x \in E''$ pour tout $x \in E$ et que l'application $J : x \mapsto J_x$ est une isométrie de E sur $J(E) \subset E''$. (Définition : On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.)

Exercice 2 (Hahn-Banach positif)

Soit F un sous espace vectoriel de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et T une application linéaire positive de F dans $\mathbb{R}$ (T positive signifie : $(f \geq 0 \Rightarrow T(f) \geq 0)$).

1. On suppose que F contient les fonctions constantes. Montrer qu'il existe $\bar{T}$, application linéaire positive de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, t.q. $\bar{T} = T$ sur F . [On pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Hahn-Banach ou se ramener au théorème de Hahn-Banach.]
2. Montrer (en donnant un exemple) que le résultat de la question précédente peut être faux si F ne contient pas les fonctions constantes.

Exercice 3 (Pas de théorème de Riesz sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$)

Si μ est une mesure finie sur les boréliens de $\mathbb{R}$, on définit T_μ sur $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par : $T_\mu(f) = \int f d\mu$, pour tout $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. T_μ est donc une application linéaire positive de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Construire une application linéaire positive, notée T , de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ t.q. $T \neq T_\mu$ pour toute mesure finie μ sur les boréliens de $\mathbb{R}$. [Utiliser l'exercice 2.]

Exercice 4 (Jauge d'un convexe)

Soient E un espace de Banach réel et $C \subset E$ un convexe ouvert contenant 0.

1. Pour $x \in E$, montrer que $\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\} \neq \emptyset$.
Pour $x \in E$, on pose $p(x) = \inf\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\}$.
2. Soit $x \in E$, montrer que $\{\lambda > 0, (x/\lambda) \in C\} = [p(x), \infty[$.
3. Montrer que $p(ax) = ap(x)$ et $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$ et tout $a > 0$.
4. Soit $x \in E$ Montrer que
 $x \in C$ si et seulement si $p(x) < 1$.
 $x \in \bar{C}$ si et seulement si $p(x) \leq 1$,

Exercice 5 (séparation d'un point et d'un convexe (Hahn-Banach "géométrique"))

Soient E un espace de Banach réel, $C \subset E$ un convexe non vide et $a \in E \setminus \bar{C}$. Dans cet exercice, on se propose de montrer la propriété suivante :

$$\begin{aligned} \exists \varphi \in E', \exists \alpha \in \mathbb{R}, \\ \varphi(a) > \alpha, \varphi(x) \leq \alpha, \forall x \in C. \end{aligned} \quad (1)$$

1. On suppose dans cette question que C est ouvert et $0 \in C$. Montrer (1). [Utiliser l'exercice précédent et le théorème de Hahn-Banach.]
2. On suppose dans cette question que $0 \in C$. Montrer (1). [Se ramener à la question précédente en introduisant le convexe $C_\star = \cup_{x \in C} B(x, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ convenablement choisi.]
3. Montrer (1). [Se ramener à la question précédente.]

Exercice 6 (Convexe fermé=convexe fermé "faible")

Soit E un espace de Banach réel et $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

1. On pose $A = E \setminus C$. Montrer qu'il existe $(\varphi_x)_{x \in A} \subset E'$ et il existe $(\alpha_x)_{x \in A} \subset \mathbb{R}$ t.q.

$$C = \bigcap_{x \in A} \varphi_x^{-1}([-\infty, \alpha_x]).$$

2. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C et $y \in E$ t.q. $y_n \rightarrow y$ faiblement dans E , quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que $y \in C$.

Exercice 7 (Lemme de Mazur)

Soit E un espace de Banach réel.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ et $x \in E$ t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E , quand $n \rightarrow \infty$.

On pose $C_n = \text{Conv}\{x_m, m \geq n\}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons convexes des x_m , $m \geq n$).

1. Montrer que $x \in \bar{C}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. [Utiliser l'exercice 6.]
2. Montrer qu'il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ t.q. $y_n \in \text{Conv}\{x_m, m \geq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.