Universités de Marseille, Analyse fonctionnelle, td 5, Octobre 2005
Curiosités sur les normes...

Exercice 1 (Normes construites à partir d'une base algébrique)
Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une base algébrique de E.
Soit $x \in E$, on sait qu'il existe une unique famille, $(\lambda_i)_{i\in I}$, de nombres réels telle que $\text{card}\{i \in I\,;\, \lambda_i \neq 0\} < +\infty$, et $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ (noter que cette dernière somme a bien un sens, car il y a un nombre fini de termes non nuls). On pose $\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |\lambda_i|$, $\|x\|_2 = (\sum_{i\in I}(\lambda_i)^2)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\|_\infty = \sup_{i\in I} |\lambda_i|$.

1. Montrer que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont trois normes sur E.
2. Montrer que $\|.\|_2$ est induite par un produit scalaire (donner le produit scalaire) et que $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas induites par un produit scalaire si $\text{card} I > 1$.
3. Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$, pour tout $x \in E$. Si E est de dimension finie, on sait que les trois normes sont équivalentes. Si E est de dimension infinie, montrer que chacune des trois normes n'est pas équivalente à chacune des deux autres.

Exercice 2 (La limite d'une suite peut dépendre de la norme ...)
Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$ la norme sur E. On suppose que E est de dimension infinie.

1. Montrer qu'il existe $(e_i)_{i\in I}$, base algébrique de E, telle que $\mathbb{N} \in I$ et $(\frac{1}{n})e_n \to e_0$ (pour la norme de E) quand $n \to \infty$.
2. Montrer qu'il existe une autre norme sur E, notée $\|.\|_\star$, un élément <u>non nul</u> de E, noté a, et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in E$ t.q. $a_n \to a$ dans $(E, \|\cdot\|)$ et $a_n \to 0$ dans $(E, \|\cdot\|_\star)$, quand $n \to \infty$.

   En déduire que $a = a_n + b_n$ avec $b_n \to 0$ dans $(E, \|\cdot\|)$ et $a_n \to 0$ dans $(E, \|\cdot\|_\star)$, quand $n \to \infty$.

Exercice 3 (La dérivée peut dépendre de la norme ...)
Soit E un e.v.n. sur $\mathbb{R}$. On note $\|.\|$ la norme sur E. On suppose que E est de dimension infinie.
Montrer qu'il existe une autre norme sur E, notée $\|.\|_\star$, et une application $f : \mathbb{R} \to E$ telles que :

(i) f est dérivable (et différentiable) en 0 si on munit E de la norme $\|.\|$. On note $f'(0)$ cette dérivée (noter que $f'(0) \in E$).

(ii) f est dérivable (et différentiable) en 0 si on munit E de la norme $\|.\|_\star$. On note $f'_\star(0)$ cette dérivée (noter que $f'_\star(0) \in E$).

(iii) $f'(0) \neq f'_\star(0)$.

[on pourra définir f par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}e_n((n+1)t-1) + \frac{1}{n+1}e_{n+1}(1-nt), \text{ si } \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ 0, \text{ si } t = 0; \\ f(t) = -f(-t), \text{ si } t < 0, \end{cases}$
avec $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convenablement choisie, conformément à l'exercice précédent.]

Exercice 4 (Différentiabilité de la norme)

1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{R}$). Montrer que l'application : $x \mapsto \|x\|$ n'est pas différentiable en 0.
2. On suppose maintenant que E est un espace de Hilbert (réel), on définit ϕ et ψ de E dans $\mathbb{R}$ par :

   $$\phi(x) = (x/x),\ \ \psi(x) = \|x\|,\ \text{pour } x \in E.$$

   Montrer que ϕ est différentiable en tout point de E. Calculer $D\phi(x)(y)$, pour tout $(x, y) \in E \times E$, et $\text{grad}\phi(x)$, pour tout $x \in E$. Montrer que ψ est différentiable en tout point de $E \setminus \{0\}$. Calculer $D\psi(x)(y)$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$ et tout $y \in E$. Calculer $\text{grad}\psi(x)$, pour tout $x \in E$.

Exercice 5 (Différentiabilité de la norme L^2)
Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \int_0^1 (u(t))^2 dt, \ \forall u \in E.$$

On munit E de la norme de L^1, ou de la norme de L^∞, f est elle différentiable en tout point de E? (Traiter les deux cas séparément).

Exercice 6 (Différentiabilité de la norme L^1)
Soit $E = L^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. On munit E de la norme habituelle. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par :

$$f(w) = \int_0^1 |w(t)| dt, \ \forall w \in E.$$

Soit $u \in E$. On pose $A_+ = \{x \in \mathbb{R} \,;\, u(x) > 0\}$, $A_- = \{x \in \mathbb{R} \,;\, u(x) < 0\}$, $A_0 = \{x \in \mathbb{R} \,;\, u(x) = 0\}$.

1. Soit $v \in E$, $v \neq 0$. Montrer que f est dérivable en u dans la direction v et que :

$$f'_v(u) = \int v 1_{A_+} d\lambda - \int v 1_{A_-} d\lambda + \int |v| 1_{A_0} d\lambda.$$

2. On suppose dans cette question que $\lambda(A_0) \neq 0$. Montrer que l'application $v \mapsto f'_v(u)$ n'est pas linéaire (de E dans $\mathbb{R}$). En déduire que f n'est pas différentiable en u.
3. On suppose dans cette question que $\lambda(A_0) = 0$. Montrer que l'application $v \mapsto f'_v(u)$ est linéaire continue (de E dans $\mathbb{R}$). Montrer cependant que f n'est pas différentiable en u. [On pourra calculer $f(u+h)$, avec $h = -2u1_A$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.]

Exercice 7 (Normes "de Banach")
Partie I. Soient E un e.v. sur $\mathbb{R}$ de dimension infinie et $\|\cdot\|_1$ une norme sur E. On suppose que E, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, est un espace de Banach. On se propose de contruire une nouvelle norme sur E, notée $\|\cdot\|_2$, t.q. E muni de la norme $\|\cdot\|_2$ soit un espace de Banach et t.q. $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne soient pas équivalentes.

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base algébrique de E (une telle base existe toujours). Comme E est de dimension infinie, on peut supposer que I contienne $\mathbb{N}^\star$. Pour $x \in E$, il existe $I_x \subset I$ et $(x_i)_{i \in I_x} \subset \mathbb{R}^\star$ t.q. $x = \sum_{i \in I_x} x_i e_i$. En posant $x_i = 0$ si $i \notin I_x$, on a aussi $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. On pose alors $Ax = \sum_{i \in \mathbb{N}^\star} i x_i e_i + \sum_{i \in I \setminus \mathbb{N}^\star} x_i e_i$ et $\|x\|_2 = \|Ax\|_1$.

1. Montrer que l'application $A : x \mapsto Ax$ est une application linéaire bijective de E dans E.
2. Montrer que E, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est un espace de Banach.
3. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ ne sont pas des normes équivalentes.

Partie II. Soient E un e.v. sur $\mathbb{R}$. Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E. On suppose que E, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, est un espace de Banach et que E, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, est aussi un espace de Banach. On suppose qu'il existe un e.v.t. F t.q. E, muni de la norme $\|\cdot\|_1$, s'injecte continûment dans F et t.q. E, muni de la norme $\|\cdot\|_2$, s'injecte aussi continûment dans F. On va montrer ci après que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

1. On définit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Montrer que E, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Banach.
2. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.