

Universités de Marseille, Analyse fonctionnelle, td 6, octobre 2005
Convergence faible, continuité faible...

Exercice 1 (Convergence faible = convergence forte, dans l^1)

On pose :

$$l^\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} ; \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} < \infty\},$$

$$l^1 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} ; \sum_{n=0}^\infty |x_n| < \infty\}.$$

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ on pose $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$.

Pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ on pose $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n|$.

1. Montrer que l^∞ et l^1 sont des espaces de Banach.

2. Soit $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$.

On définit $T_y : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$T_y(x) = \sum_{n=0}^\infty x_n y_n, \forall x \in l^1.$$

(Remarquer que la série $\sum_{n=0}^\infty x_n y_n$ est bien convergente, pour tout $x \in l^1$.)

Montrer que $T_y \in (l^1)'$, et que $\|T_y\|_{(l^1)'} = \|y\|_\infty$.

3. Soit $T \in (l^1)'$. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ tel que $T = T_y$.

[On pourra poser $y_n = T(e^{(n)})$, avec $e^{(n)} = (\delta_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$.]

4. Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset l^1$ une suite telle que :

i) $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$, $x_i^{(n)} \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

ii) $\|x^{(n)}\|_1 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que l'on peut extraire de la suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ et trouver une suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telles que :

$$\alpha_k < \alpha_{k+1}, \sum_{i=0}^{\alpha_k} |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \sum_{i=\alpha_k+1}^{\alpha_{k+1}} |x_i^{(n_k)}| \geq \frac{3}{5}, \sum_{i=\alpha_{k+1}+1}^\infty |x_i^{(n_k)}| \leq \frac{1}{5}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

b. Montrer qu'il existe $y \in l^\infty$ telle que $T_y(x^{(n_k)}) \geq \frac{1}{5}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ ($(x^{(n_k)})_{k \in \mathbb{N}}$ donnée en a.).

5. Soient $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset l^1$ et $x \in l^1$. Montrer que $x^{(n)} \rightarrow x$ faiblement dans l^1 (c'est-à-dire $T(x^{(n)}) \rightarrow T(x)$ pour tout $T \in (l^1)'$) si et seulement si $x^{(n)} \rightarrow x$ dans l^1 .

Exercice 2 (Faiblement fermé $\Rightarrow$ séquentiellement faiblement fermé)

Soit E un espace de Banach et F une partie de E .

1. On suppose que F une partie fermée de E pour la topologie faible de E , c'est-à-dire la topologie $\sigma(E, E')$ (on dit alors que F est faiblement fermée). Montrer que F est séquentiellement faiblement fermée (c'est-à-dire que F contient les limites des suites faiblement convergentes d'éléments de F).

2. On prend ici $E = l^1$ (cet espace et sa norme sont définis dans l'exercice 1). Montrer qu'il existe F partie de E , séquentiellement faiblement fermée et non faiblement fermée...

Exercice 3 (Convergences forte, faible et faible-*)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $f_n(t) = e^{int} e^{-t^2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.
2. (Rappel.) Soit $\psi \in L^1_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{int} \psi(t) dt \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

3. Soit $1 \leq p < \infty$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle faiblement dans $L^p_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$? La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle (fortement) dans $L^p_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$?
4. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle faiblement dans $L^{\infty}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$? La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle (fortement) dans $L^{\infty}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$? En identifiant (voir cours) $L^{\infty}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$ au dual de $L^1_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle $\star$ -faiblement dans $L^{\infty}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$?

Exercice 4 (Les “ouverts faibles” sont non bornés)

Soit E est un espace de Banach réel de dimension infinie.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $l_1, \dots, l_n \in E'$. Montrer qu'il existe $y \in E$ t.q. $l_i(y) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
2. Soient $x_0 \in E$ et V un voisinage faible de 0. Montrer que V contient une droite affine passant par x_0 (c'est-à-dire qu'il existe $e \in E \setminus \{0\}$ t.q. $\{x_0 + te, t \in \mathbb{R}\} \subset V$).
3. Montrer que $U = \{x \in E, \|x\|_E < 1\}$ est d'intérieur vide pour la topologie faible.

Exercice 5 (Unicité de la limite)

Soit E est un espace de Banach réel.

1. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x, y \in E$ t.q. $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E et $x_n \rightarrow y$ faiblement dans E (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $x = y$.
2. Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T, S \in E'$ t.q. $T_n \rightarrow T$ $\star$ -faiblement dans E' et $T_n \rightarrow S$ $\star$ -faiblement dans E' (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $T = S$.
3. Soient $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E'$, $T, S \in E'$ t.q. $T_n \rightarrow T$ $\star$ -faiblement dans E' et $T_n \rightarrow S$ faiblement dans E' (quand $n \rightarrow \infty$). Montrer que $T = S$.

Exercice 6 (Continuité faible)

Soit E et F deux espaces de Banach (réel) et soit T une application linéaire de E dans F .

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (a) T continue de E dans F ,
 - (b) T est continue de E muni de la topologie $\sigma(E, E')$ dans F muni de la topologie $\sigma(F, F')$,
 - (c) T est continue de E dans F muni de la topologie $\sigma(F, F')$.
2. Montrer que T est continue de E muni de la topologie $\sigma(E, E')$ dans F si et seulement si T est de rang fini (c'est-à-dire que $\dim(\text{Im}(T)) < \infty$).
3. Donner un exemple pour lequel T est séquentiellement continue de E , muni de la topologie $\sigma(E, E')$, dans F (c'est-à-dire que $T(x_n) \rightarrow T(x)$ dans F si $x_n \rightarrow x$ faiblement dans E) et T n'est pas de rang fini.