**Analyse fonctionnelle et analyse de Fourier,**
**Master 1, mathématiques et applications, 3eme evaluation, 24 novembre 2021**

L'examen contient 3 exercices. Le barème est sur 22 points. Les documents (polycopié du cours, notes personnelles, photocopies de documents) sont autorisés. Chaque réponse devra être justifiée. Vous pouvez utiliser les résultats qui ont été démontré en TD (sauf pour la question 1 de l'exercice 1 ou il est demandé de redonner cette démonstration).
Le but des deux premiers exercices est de démontrer deux résultats vus en cours et TD mais non démontrés. Le troisième exercice donne un résultat important dans l'étude des probabilités.

**Exercice 1** (Convergence faible-$\star$ contre convergence (forte), barème 3 points)**.**
Soit $E$ est un espace de Banach réel. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite d'éléments de $E'$, $f \in E'$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$ et $x \in E$.
On suppose que $f_n \to f$ $\star$-faiblement dans $E'$ et que $x_n \to x$ dans $E$.

1. (Question vue en TD) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

*Corrigé –* *C'est une conséquence de Banach-Steinhaus.*
*Pour tout $x \in E$, la suite $(\langle f_n, x\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car convergente). Le théorème de Banach-Steinhaus donne alors que la suite $(\|f_n\|_{E'})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

2. Montrer que $\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} \to \langle f, x\rangle_{E',E}$ quand $n \to +\infty$.

*Corrigé –* *Il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. (pour tout $n \in \mathbb{N}$) $\|f_n\|_{E'} \le C$ et donc*

$$\begin{aligned}|\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| &\le |\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f_n, x\rangle_{E',E}| + |\langle f_n, x\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| \\ &\le C\|x_n - x\|_E + |\langle f_n, x\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}|.\end{aligned}$$

*Les deux termes de droite tendent vers $0$ quand $n \to +\infty$.*

**Exercice 2** (Sous espace vectoriel fermé d'un espace de Banach réflexif, barème 8 points)**.**
Soit $E$ est un espace de Banach (réel) réflexif et $F$ un sous espace vectoriel fermé de $E$. L'espace $F$ (muni de la norme de $E$) est donc aussi un espace de Banach.
Pour $G = E$ ou $G = F$ On note $J_G$ l'injection vue en cours de $G$ dans $G''$.
Soit $u \in F''$.

1. Si $f \in E'$, on désigne par $f_{|_F}$ la restriction de $f$ à $F$ (et donc $f_{|_F} \in F'$).
   Montrer que l'application $f \mapsto \langle u, f_{|_F}\rangle_{F'',F'}$ est linéaire continue de $E'$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc un élément de $E''$ que l'on note $v$ dans la suite (de sorte que $\langle v, f\rangle_{E'',E'} = \langle u, f_{|_F}\rangle_{F'',F'}$).
   Montrer que $\|v\|_{E''} \le \|u\|_{F''}$.

*Corrigé –*
*L'application $v$ est bien linéaire. Elle est continue car, pour tout $f \in E'$, $\|f_{|_F}\|_{F'} \le \|f\|_{E'}$ et donc $|\langle u, f_{|_F}\rangle_{F'',F'}| \le \|u\|_{F''}\|f_{|_F}\|_{F'} \le \|u\|_{F''}\|f\|_{E'}$. Ceci montre que $v \in E''$ et $\|v\|_{E''} \le \|u\|_{F''}$.*

2. (Question inutile pour la suite de l'exercice) A-t-on $\|v\|_{E''} = \|u\|_{F''}$ ?

*Corrigé –* *La réponse est "oui". En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe $g \in F'$ tel que $\|g\|_{F'} = 1$ et $\langle u, g\rangle_{F'',F'} \ge \|u\|_{F''} - \varepsilon$. Le théorème de Hahn-Banach analytique donne l'existence de $f \in E'$ tel que $f_{|_F} = g$ et $\|f\|_{E'} = \|g\|_{F'}$. On en déduit que*

$$\|v\|_{E''} \ge \langle v, f\rangle_{E'',E'} = \langle u, g\rangle_{F'',F'} \ge \|u\|_{F''} - \varepsilon.$$

*Comme $\varepsilon$ est arbitraire, ceci donne $\|v\|_{E''} \ge \|u\|_{F''}$ et donc finalement $\|v\|_{E''} = \|u\|_{F''}$.*

3. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\langle v, f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}$ pour tout $f \in E'$. [Utiliser le fait que $E$ est réflexif.]

*Corrigé –* *Comme $E$ est réflexif, $\mathrm{Im} J_E = E''$ et donc il existe $x \in E$ tel que $v = J_E(x)$ et donc $\langle v, f\rangle_{E'',E'} = \langle J_E(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle f, x\rangle_{E',E}$ pour tout $f \in E'$.*

4. On considère l'élément $x$ de $E$ trouvé à la question 3.
   (a) Montrer que $x \in F$. [Utiliser une conséquence du théorème de Hahn-Banach vue au TD1.]

*Corrigé –* *Si $x \notin F$. Le théorème de Hahn-Banach donne qu'il existe $f \in E'$ t.q. $f_{|_F} = 0$ et $\langle f, x\rangle_{E',E} \neq 0$. Ce qui est impossible car*

$$0 \neq \langle f, x\rangle_{E',E} = \langle v, f\rangle_{E'',E'} = \langle u, f_{|_F}\rangle_{F'',F'} = 0.$$

(b) Montrer que $J_F(x) = u$.

*Corrigé –* *Soit $g \in F'$. Par Hahn-Banach, il existe $f \in E'$ tel que $f_{|_F} = g$. On a donc, comme $x \in F$,*

$$\langle J_F(x), g\rangle_{F'',F'} = \langle g, x\rangle_{F',F} = \langle f, x\rangle_{E',E} = \langle J_E(x), f\rangle_{E'',E'} = \langle v, f\rangle_{E'',E'} = \langle u, f_{|_F}\rangle_{F'',F'} = \langle u, g\rangle_{F'',F'}.$$

*On a bien montré que $J_F(x) = u$.*

5. Déduire des questions précédentes que $F$ est réflexif.

*Corrigé –* *Les questions précédentes montrent que $\mathrm{Im} J_F = F''$ et donc que $F$ est réflexif.*

**Exercice 3** (Sur la convergence faible-$\star$ (à sous suite près) des suites de $(C_b)'$, barème 11 points)**.**
On note $E$ l'espace de Banach $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muni de sa norme naturelle que l'on note $\|\cdot\|$.
On note $F$ l'espace $C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un s.e.v. fermé de $E$).
Si $f \in E$, $f \geq 0$ signifie $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\mu \in E'$ telle que pour tout $f \in E$, $f \geq 0$ implique $\langle \mu, f\rangle_{E',E} \geq 0$.
   Montrer que pour tout $f, g \in E$,

$$g \geq 0 \;\Rightarrow\; |\langle \mu, fg\rangle_{E',E}| \leq \|f\| \langle \mu, g\rangle_{E',E}.$$

*Corrigé –* *Soient $f$, $g \in E$, $g \geq 0$. Comme $fg \leq \|f\| g$, $\|f\| g - fg \geq 0$ et donc $\langle \mu, fg\rangle_{E',E} \leq \|f\| \langle \mu, g\rangle_{E',E}$. Cette inégalité étant aussi vraie avec $-f$, on en déduit $|\langle \mu, fg\rangle_{E',E}| \leq \|f\| \langle \mu, g\rangle_{E',E}$.*

On considère maintenant une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E'$. On suppose que

- $\langle \mu_n, f\rangle_{E',E} \geq 0$ pour tout $f \in E$, $f \geq 0$, et tout $n \in \mathbb{N}$.
- $\langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}\rangle_{E',E} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ($\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est la fonction qui vaut 1 en tout point de $\mathbb{R}$.)

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mu_n\|_{E'} = 1$. Puis, déduire du fait que $F$ est séparable (propriété vue en cours) qu'il existe une sous suite de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, encore notée $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que, pour tout $f \in F$, la suite $(\langle \mu_n, f\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to +\infty$.
   (Ceci signifie que la suite des restrictions de $\mu_n$ à $F$ converge $\star-$faiblement dans $F'$.)

*Corrigé –* *Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $f \in E$, $\langle \mu_n, f\rangle_{E',E} \leq \|f\| \langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}\rangle_{E',E} = \|f\|$. On en déduit que $\|\mu_n\|_{E'} \leq 1$. Comme $\langle \mu_n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}}\rangle_{E',E} = 1$, on a finalement $\|\mu_n\|_{E'} = 1$.*
*La suite des restrictions de $\mu_n$ à $F$ est une suite bornée de $F'$. Comme $F$ est séparable, on en déduit que cette suite admet une sous suite qui converge $\star-$faiblement dans $F'$.*

On considère dans la suite de l'exercice cette suite extraite trouvée à la question 2 (et toujours notée $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on note $\varphi_p$ la fonction définie par

$$\begin{aligned}
&\varphi_p(x) = 1 \text{ si } -p \leq x \leq p,\\
&\varphi_p(x) = 1 - (x - p) \text{ si } p < x < p + 1,\\
&\varphi_p(x) = 1 + (x + p) \text{ si } -p - 1 < x < -p,\\
&\varphi_p(x) = 0 \text{ si } |x| \geq p + 1.
\end{aligned}$$

On définit $\psi_p$ par $\psi_p(x) = 1 - \varphi_p(x)$. Noter que $\psi_p \in E$ et $\varphi_p \in F$.

3. Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, représenter graphiquement les fonctions $\varphi_p$ et $\psi_p$.

On suppose maintenant de plus que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, c'est-à-dire que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \langle \mu_n, \psi_p\rangle_{E',E} \to 0 \text{ quand } p \to +\infty. \tag{1}$$

4. Montrer que pour tout $f \in E$, la suite $(\langle \mu_n, f\rangle_{E',E}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (dans $\mathbb{R}$).
   [Utiliser $f = f\varphi_p + f\psi_p$ et la convergence faible$-\star$ des restrictions des $\mu_n$ à $F$.]

   *Corrigé –* *Soient $n$, $m \in \mathbb{N}$, $f \in E$ et $p \in \mathbb{N}$. En utilisant $f = f\varphi_p + f\psi_p$,*

   $$\begin{aligned}|\langle \mu_n, f\rangle_{E',E} - \langle \mu_m, f\rangle_{E',E}| &\le |\langle \mu_n, f\psi_p\rangle_{E',E}| + |\langle \mu_m, f\psi_p\rangle_{E',E}| + |\langle \mu_n, f\varphi_p\rangle_{E',E} - \langle \mu_m, f\varphi_p\rangle_{E',E}| \\ &\le 2\|f\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle \mu_n, \psi_p\rangle_{E',E} + |\langle \mu_n, f\varphi_p\rangle_{E',E} - \langle \mu_m, f\varphi_p\rangle_{E',E}|.\end{aligned}$$

   *Soit $\varepsilon > 0$, grâce à (1) il existe $p \in \mathbb{N}$ t.q. $2\|f\| \sup_{n\in\mathbb{N}} \langle \mu_n, \psi_p\rangle_{E',E} \le \varepsilon$. Puis, comme $f\varphi_p \in F$, il existe $n_0$ tel que $n$, $m \ge n_0$ implique $|\langle \mu_n, f\varphi_p\rangle_{E',E} - \langle \mu_m, f\varphi_p\rangle_{E',E}| \le \varepsilon$. Finalement,*

   $$n, m \ge n_0 \Rightarrow |\langle \mu_n, f\rangle_{E',E} - \langle \mu_m, f\rangle_{E',E}| \le 2\varepsilon.$$

5. Montrer qu'il existe $\mu \in E'$ telle que $\mu_n \to \mu$ $\star-$faiblement dans $E'$ quand $n \to +\infty$. Montrer que $\langle \mu, f\rangle_{E',E} \ge 0$ pour tout $f \in E$, $f \ge 0$, et que $\langle \mu, \mathbf{1}_\mathbb{R}\rangle_{E',E} = 1$.

   *Corrigé –* *La question 4 montre que la suite $(\langle \mu_n, f\rangle_{E',E})_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans $\mathbb{R}$) pour tout $f \in E$. On note $L(f)$ cette limite. L'application $L$ est linéaire comme limite d'applications linéaires. En passant à la limite dans l'inégalité $|\langle \mu_n, f\rangle_{E',E}| \le \|f\|$, on obtient qu'il existe $\mu \in E'$ t.q. $L(f) = \langle \mu, f\rangle_{E',E}$ et $\|\mu\|_{E'} \le 1$.*
   *On a obtenu que $\mu_n \to \mu$ $\star-$faiblement dans $E'$.*
   *De plus, soit $f \in E$, $f \ge 0$. En passant à la limite dans $\langle \mu_n, f\rangle_{E',E} \ge 0$ on en déduit $\langle \mu, f\rangle_{E',E} \ge 0$.*
   *Enfin, $\langle \mu, \mathbf{1}_\mathbb{R}\rangle_{E',E} = 1$ s'obtient en passant à la limite dans l'égalité $\langle \mu_n, \mathbf{1}_\mathbb{R}\rangle_{E',E} = 1$.*

6. Si la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne vérifie pas la condition (1), donner (sans démonstration) un exemple pour lequel la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\star-$faiblement dans $F'$ mais ne converge pas $\star-$faiblement dans $E'$.

   *Corrigé –* *la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E'$ définie par $\langle \mu_n, f\rangle_{E',E} = f(n)$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$) convient.*

NB : Cet exercice montre que d'une suite de variables aléatoires réelles tendue (ceci correspond à l'hypothèse (1) pour la suite des lois de $X_n$) on peut extraire une suite convergente en loi.